

## RESUMO

A relação íntima entre propriedades de simetria e leis de conservação de um sistema mecânico é considerada fundamental, não sendo exclusiva da mecânica clássica, mas também observada na mecânica quântica, na teoria quântica de campos e demais áreas da física. Esta relação corresponde à invariância do sistema sob certas transformações matemáticas, o que define uma lei de conservação associada. Em contrapartida, a descoberta de que certas folhas planas de grafite – designadas como grafeno – possuem estabilidade sob condições experimentais apropriadas, abriu um novo campo de pesquisa voltado para uma tecnologia inovadora de dispositivos eletrônicos, valendo a Novoselov e Geim o Prêmio Nobel de Física de 2010. A partir daí, diferentes conformações estruturais do grafeno foram desenvolvidas; uma delas é a bicamada de grafeno. Num contexto de relevância do estudo deste material, para além das conhecidas interações de Van der Waals presentes na bicamada, há uma série de fenômenos cujas propriedades físicas são de elevada importância na pesquisa básica: a existência de cargas fracionárias que resultam de modos zero de Dirac (pontos de Dirac) presentes na primeira zona de Brillouin da rede cristalina formado pelo grafeno; este fracionamento resulta em um efeito Hall quântico aprimorado; elétrons com velocidade de Fermi com comportamento semelhante ao de fótons e por isso considerados destituídos de massa, com efeitos relativísticos. R. Jackiw e S.-Y. Pi aplicaram um campo de calibre para a oscilação de energia presente na primeira zona de Brillouin e postularam um *Ansatz*, estabelecendo um sistema de oscilações acopladas através de um par de equações diferenciais de primeira ordem lineares. A fim de verificar as leis de conservação deste sistema, consideramos uma formulação variacional que descreva o sistema, apresentando simetrias de Noether. A partir do hamiltoniano, não-trivial para o caso, é construída uma lagrangiana e o problema é tratado através dos métodos de simetrias e invariantes de Noether, a fim de encontrar constantes de movimento. Este processo é fundamentado em transformações infinitesimais constituindo uma álgebra de Lie. Através da equação de Pinney, determinou-se uma solução analítica para o par de equações proposto, inexistente na literatura até o presente momento.

**Palavras-chave:** *Equações Diferenciais, Sistemas Não-lineares, Equação de Pinney, Sistemas Integráveis, Teorema de Noether, Oscilador Harmônico Dependente do Tempo, Modelo de Jackiw-Pi, Grafeno.*

## ABSTRACT

The close relationship between symmetry properties and conservation laws of a mechanical system is considered a fundamental relationship, not exclusive to classical mechanics, but also observed in quantum mechanics, quantum field theory and other areas in physics. This relation corresponds to the invariance of the system under certain mathematical transformations, which defines an associated conservation law. On the other hand, the discovery that certain flat sheets of graphite – designated as graphene – have stability under appropriate experimental conditions, opened a new field of research oriented to innovative technology of electronic devices, resulted to Novoselov and Geim the Nobel Prize of Physics 2010. From there, different structural conformations of graphene have been developed; one of which is the graphene bilayer. In a relevant context about study of this material, beyond known Van der Waals interactions present in the bilayer, there are a series of phenomena whose physical properties are of high importance in basic research: the existence of fractional charges that result from zero Dirac modes (Dirac points) present in the first Brillouin zone of the crystal lattice formed by graphene; this fractionation results in an enhanced quantum Hall effect; electrons with Fermi speed with photons-like behavior and therefore considered devoid of mass, with relativistic effects. R. Jackiw and S.-Y. Pi applied a gauge field to the energy oscillation present in the first Brillouin zone and postulated an *Ansatz*, establishing a system of coupled oscillations through a pair of linear first-order differential equations. In order to verify the conservation laws of this system, we consider a variational formulation that describes the system and that presents the Noether's symmetry relations. From the Hamiltonian, non-trivial for the case, a Lagrangian is constructed and we start to treat the problem through the methods of symmetries and Noether's invariants, in order to find constants of motion. This process is based on infinitesimal transformations forming a Lie algebra. By means of Pinney's equation, we found an analytical solution for the proposed pair of equations, non-existent in the literature until the present moment.

**Keywords:** *Differential Equations, Pinney's Equation, Nonlinear Systems, Integrable Systems, Noether's Theorem, Time Dependent Harmonic Oscillator, Jackiw-Pi Model, Graphene.*