# Resumo

Redes complexas (ou grafos aleatórios) são ferramentas importantes na modelagem das interações em sistemas complexos, como redes neurais, ecossistemas, redes reguladoras de genes, entre outros. As propriedades espectrais das matrizes que descrevem estas redes, como a matriz de adjacência e a matriz laplaciana, são fundamentais para investigar o impacto da estrutura das interações sobre o comportamento dinâmico de sistemas organizados em rede. Nos últimos anos, vários trabalhos foram publicados sobre as propriedades espectrais de grafos aleatórios heterogêneos. No entanto, resultados analíticos são conhecidos em apenas uma pequena gama de casos, nos quais a estrutura do grafo se torna homogênea. Neste trabalho, obtemos resultados analíticos para as propriedades espectrais da matriz de adjacência e da matriz laplaciana de grafos aleatórios heterogêneos com distribuições de grau arbitrárias no limite de alta conectividade. Apoiados sobre a teoria de matrizes aleatórias esparsas, desenvolvemos um método para estudar o limite de alta conectividade de grafos aleatórios e mostramos que, para ambas as matrizes, a densidade espectral, a razão de participação inversa e a densidade local de estados são completamente determinadas pela escolha da distribuição de grau do grafo aleatório. A densidade espectral fornece a distribuição de probabilidade dos autovalores, enquanto a razão de participação inversa e a densidade local de estados contém informações sobre as propriedades de localização dos autovetores da matriz correspondente. Considerando que os graus seguem uma distribuição binomial negativa, estudamos o papel das flutuações dos graus sobre o comportamento dos observáveis espectrais. Para a matriz de adjacência, mostramos que todos os autovetores são estendidos e observamos que, em geral, a densidade espectral não converge para a lei semicircular de Wigner, apresentando uma singularidade em torno do autovalor nulo quando a variância da distribuição de grau é suficientemente grande. Além disso, mostramos que este comportamento singular observado na densidade espectral é causado pelas flutuações das componentes dos autovetores. No regime de baixas flutuações nos graus, a densidade espectral apresenta um suporte finito, o que promove a estabilidade de sistemas complexos em grafos aleatórios. Quanto à matriz laplaciana, verificamos que, na ausência de flutuações nas forças de acoplamento entre os vértices, a matriz possui somente autovalores positivos, apresentando autovalores negativos somente na presença dessas flutuações. Além disso, obtemos um resultado analítico para a distribuição da densidade local de estados de grafos homogêneos, verificando o caráter finito de seu suporte. Através de integrações numéricas, mostramos que a densidade espectral de grafos aleatórios com distribuição binomial negativa apresenta uma quebra de simetria quando a média das forças de acoplamento é não-nula.

# Abstract

Complex networks (or random graphs) are important tools for modeling the interactions of complex systems, such as neural networks, ecosystems, gene regulatory networks, and many others. The spectral properties of the matrices that describe these networks, such as the adjacency matrix and the laplacian matrix, are fundamental for investigating the impact of the structure of interactions on the dynamical behavior of systems organized in a network. In recent years, several works have been published on the spectral properties of heterogeneous random graphs. However, analytical results are known only for a small range of cases, in which the graph structure becomes homogeneous. In this work, we obtain analytical results for the spectral properties of the adjacency matrix and the laplacian matrix of heterogeneous random graphs with arbitrary degree distributions in the high connectivity limit. Established on the theory of sparse random matrices, we develop a method to study the high connectivity limit of random graphs and show that, for both matrices, the spectral density, the inverse participation ratio, and the local density of states are completely determined by the choice of the degree distribution of the random graph. The spectral density provides the probability distribution of the eigenvalues, while the inverse participation ratio and the local density of states contain information about the localization properties of the eigenvectors of the corresponding matrix. For degrees following a negative binomial distribution, we study the role of degree fluctuations on the behavior of the spectral observables. For the adjacency matrix, we show that all eigenvectors are extended and observe that, in general, the spectral density does not converge to the Wigner semicircular law, presenting a singularity around the null eigenvalue when the variance of the degree distribution is sufficiently large. Furthermore, we show that this singular behavior observed in the spectral density is due to the fluctuations in the eigenvector components. In the regime of weak degree fluctuations, the spectral density has finite support, which promotes the stability of large complex systems in random graphs. As for the laplacian matrix, we verify that, in the absence of fluctuations in the coupling strengths between the vertices, the matrix displays only positive eigenvalues, exhibiting negative eigenvalues only in the presence of these fluctuations. Furthermore, we obtain an analytical result for the distribution of the local density of states of homogeneous random graphs, verifying the finite character of its support. Through numerical integrations, we show that the spectral density of random graphs with negative binomial distribution presents a symmetry break when the average of the coupling strengths is non-zero.