UM POUCO MAIS SOBRE AS SUTILEZAS DAS TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Imagina que tenhamos um sistema de coordenadas p, q onde as equações canônicas possam ser obtidas do princípio variacional:

$$\delta \int [p\frac{dq}{dt} - H(p,q,t)]dt = 0. \tag{1}$$

com a condição $\delta q = 0$ nos extremos. Executemos então uma transformação de coordenadas a um novo sistema P, Q obtido na forma $P = P(p,q,t)$ e $Q = Q(p,q,t)$, mas restrito a ser canônico.

Quando dizemos "restrito a ser canônico", estamos de fato afirmando que as equações de movimento no novo sistema devem também ser expressas no formato canônico padrão

$$\dot{Q} = \partial\hat{H}/\partial P; \quad \dot{P} = -\partial\hat{H}/\partial Q, \tag{2}$$

mas nada mais além disto.

Esta condição canônica certamente será garantida se a seguinte igualdade for satisfeita:

$$pdq/dt - H = PdQ/dt - \hat{H} + dF/dt \tag{3}$$

com a condição acessória

$$\delta F = -P\delta Q \tag{4}$$

nos extremos. Notem que neste nosso contexto, $\delta q = 0$ por definição, mas como $Q = Q(p,q,t)$, e como p varia arbitráriamente nos extremos, *não é garantido que tenhamos* $\delta Q = 0$ *nos extremos*! Este tipo de abordagem é diferente da desenvolvida em aula.

Pois seguindo adiante e tomando o variacional da integral temporal da relação (3) temos:

$$\delta \int [pdq/dt - H]dt = \delta \int [PdQ/dt - \hat{H}]dt + \delta F_{t_2} - \delta F_{t_1}, \tag{5}$$

que pode ser reescrita, via integração por partes dos termos $p\delta(dq/dt) = pd\delta q/dt$, $P\delta(dQ/dt) = Pd\delta Q/dt$ na forma

$$\int [(-dp/dt)\delta q + (dq/dt)\delta p + (\partial H/\partial q)\delta q - (\partial H/\partial p)\partial p]dt =$$
$$P\delta Q|_{t_2} - P\delta Q|_{t_1} - \int [(-dP/dt)\delta Q + (dQ/dt)\delta P - (\partial\hat{H}/\partial Q)\delta Q - (\partial\hat{H}/\partial P)\delta P]dt + \delta F_{t_2} - \delta F_{t_1}, \tag{6}$$

ou ainda como

$$\begin{aligned} &\int [(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q})\delta q + (\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p})\delta p]dt = \\ &\int [(-\dot{P} - \frac{\partial\hat{H}}{\partial Q})\delta Q + (\dot{Q} - \frac{\partial\hat{H}}{\partial P})\delta P]dt + \\ &(P\delta Q|_{t_2} + \delta F_{t_2}) - (P\delta Q|_{t_1} + \delta F_{t_1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Se (4) for válida e se nos fixarmos em uma trajetória física no sistema p, q, então, já que δQ e δP são completamente independentes entre si (Q e P são controlados por duas variáveis livres p e q. Portanto P em princípio não pode ser controlado por uma única variável como seria o caso funcional $P = P(Q)$), teremos necessáriamente $dQ/dt = \partial\hat{H}/\partial P$ e $dP/dt = -\partial\hat{H}/\partial P$, que são as equações canônicas no sistema transformado, como queríamos.

Os tempos t_1 e t_2 são totalmente arbitrários, portanto $\partial F/\partial Q = -P$ deve ser uma condição geral de nossa transformação. Agora examinemos a forma diferencial (3). Escrevendo $dF = \partial F/\partial Q + dF_{resto}$, onde dF_{resto} denota a diferencial de F em relação ao resto de seus argumentos (ainda desconhecidos), obtemos:

$$pdq - (H - \hat{H})dt = dF_{resto} \tag{8}$$

de onde vemos que escolhendo uma função $F = F(q, Q, t)$ estamos feitos, desde que $\partial F/\partial q = p$ e que $\partial F/\partial t = \hat{H} - H$ - além, é claro, de nossa conhecida $\partial F/\partial Q = -P$. p, q, H são dados. Isto significa, por exemplo, que p não é *definido* por $\partial F(q, Q, t)/\partial q = p$, mas sim que esta relação deve ser invertida e usada para definir $Q = Q(q, p, t)$ como argumentamos inicialmente.