Incerteza de Medição

Professora Márcia Russman Gallas, IF-UFRGS
http://www.if.ufrgs.br/~marcia

Texto baseado no
Guia Para a Expressão da Incerteza de Medição, 2ª edição, ABNT, INMETRO, 1998,
e no
Manual de Laboratório de Óptica Experimental, B. Buchweitz e P. H. Dionísio, IF-UFRGS, 1994.

Introdução:

Quando se relata o resultado de medição de uma grandeza física, é obrigatório que seja dada alguma indicação quantitativa da qualidade do resultado, de forma tal que aqueles que o utilizam possam avaliar sua confiabilidade. Sem essa indicação, resultados de medição não podem ser comparados, seja entre eles mesmos ou com valores de referência fornecidos numa especificação ou numa norma. É, portanto, necessário que haja um procedimento prontamente implementado, facilmente compreendido e de aceitação geral para caracterizar a qualidade de um resultado de uma medição, isto é, para avaliar e expressar sua incerteza.

O conceito de incerteza como um atributo quantificável é relativamente novo na história da medição, embora erro e análise de erro tenham sido, há muito tempo, uma prática da ciência da medição ou metrologia. É agora amplamente reconhecido que, quando todos os componentes de erro conhecidos ou suspeitos tenham sido avaliados e as correções adequadas tenham sido aplicadas, ainda permanece uma incerteza sobre quão correto é o resultado declarado, isto é, uma dúvida acerca de quão corretamente o resultado da medição representa o valor da grandeza que está sendo medida.

Da mesma forma como o uso quase universal do Sistema Internacional de Unidades (SI) trouxe coerência a todas as medições científicas e tecnológicas, um consenso mundial sobre a avaliação e expressão da incerteza de medição permitiria que o significado de um vasto espectro de resultados de medições na ciência, engenharia, comércio, indústria e regulamentação, fosse prontamente compreendido e apropriadamente interpretado. Nesta era de mercado global, é imperativo que o método para avaliar e expressar a incerteza seja uniforme em todo mundo, de forma tal que as medições realizadas em diferentes países possam ser facilmente comparadas.

Definições:

- **Incerteza** (**de medição**): parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao **mensurando** (quantidade particular submetida a medição).

- **Incerteza padrão**: incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio padrão.

- **Incerteza padrão combinada**: incerteza padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido por meio dos valores de várias outras grandezas, sendo igual a raiz quadrada positiva de uma soma de termos, que constituem as variâncias e covariâncias destas outras grandezas, ponderadas de acordo com quanto o resultado da medição varia com mudanças nestas grandezas.

Conceitos básicos:

Medição:

O objetivo de uma medição é determinar o valor de uma grandeza específica (**mensurando**) a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do **mensurando**, do **método de medição** e do **procedimento de medição**. Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição.** Este resultado só é completo quando acompanhado pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries de observações obtidas sob **condições de repetitividade**. Supõe-se que as variações em observações repetidas surjam porque as grandezas de influência que possam afetar o resultado da medição não são mantidas completamente constantes. O modelo matemático da medição que transforma o conjunto de observações repetidas no resultado de medição é de importância crítica, porque, em adição as observações ele geralmente inclui várias grandezas de influência que não são exatamente conhecidas. Essa falta de conhecimento contribui para a incerteza do resultado da medição, assim como contribuem as variações das observações repetidas e qualquer incerteza associada com o próprio modelo matemático.

Erros, efeitos e correções: Em geral, uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** no resultado da medição. Há diversos tipos de erros possíveis, mas podemos englobá-los basicamente em duas categorias: **aleatórios** e **sistemáticos.** Aqui já estamos eliminando **erros grosseiros** que podem decorrer, por exemplo, da má leitura das escalas, de ajustes imperfeitos do instrumento, ou seja, basicamente da imperícia ou desatenção da pessoa que está medindo. Os **erros aleatórios** decorrem de fatores não controlados na realização de medidas e seu efeito consiste em produzir ao acaso acréscimos e decréscimos no valor obtido. Estes **efeitos aleatórios** são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. Embora não seja possível compensar o erro aleatório de um resultado de medição, ele pode geralmente ser reduzido aumentando-se o número de observações; seu **valor esperado** é zero. Os **erros sistemáticos** também não podem ser eliminados, porém podem ser reduzidos. Se um erro sistemático se origina de um efeito reconhecido de uma grandeza de influência em um resultado de medição, por exemplo, a má calibração de uma balança pode acrescer sistematicamente sempre a mesma quantidade nas medidas de uma determinada massa, este efeito pode ser quantificado e corrigido. Um **fator de correção** pode ser aplicado para compensar este efeito. Supõe-se que, após esta correção, o valor esperado do erro provocado por um efeito sistemático seja zero. Resumindo: os erros grosseiros podem e devem ser eliminados; os erros sistemáticos podem ser evitados ou compensados; os erros aleatórios não podem ser eliminados totalmente e deve-se conviver com eles, avaliando-os corretamente.

Incerteza: A incerteza do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento exato do valor do mensurando. O resultado de uma medição, após correção dos efeitos sistemáticos reconhecidos, é ainda, tão somente uma estimativa do valor do mensurando, por causa da incerteza proveniente dos efeitos aleatórios e da correção imperfeita do resultado para efeitos sistemáticos. Na prática existem muitas fontes possíveis de incerteza, como:

(a) definição incompleta do mensurando;

(b) realização imperfeita da definição do mensurando;

(c) amostragem não-representativa – a amostra medida pode não representar o mensurando definido;

(d) conhecimento inadequado dos efeitos das condições ambientais sobre a medição ou medição imperfeita das condições ambientais;

(e) erro de tendência pessoal na leitura de instrumentos analógicos;

(f) resolução finita do instrumento ou limiar de mobilidade;

(g) valores inexatos dos padrões de medição e materiais de referência;

(h) valores inexatos de constantes e outros parâmetros obtidos de fontes externas e usados no algoritmo de redução de dados;

(i) aproximações e suposições incorporadas ao método e procedimento de medição;

(j) variações nas observações repetidas do mensurando sob condições aparentemente idênticas.

Estas fontes não são necessariamente independentes e algumas das fontes de (a) a (i) podem contribuir para a fonte (j). Naturalmente, um efeito sistemático não reconhecido não pode ser levado em consideração na avaliação da incerteza do resultado de uma medição, porém contribui para seu erro.

Avaliando a incerteza padrão:

Na maioria dos casos, a melhor estimativa disponível do valor esperado de uma grandeza ***q*** que varia aleatoriamente e para a qual ***n*** observações independentes $\mathbf{q_k}$ foram obtidas sob as mesmas condições de medição, é a **média aritmética** ou **média** $\bar{q}$ das **n** observações:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \quad (1)$$

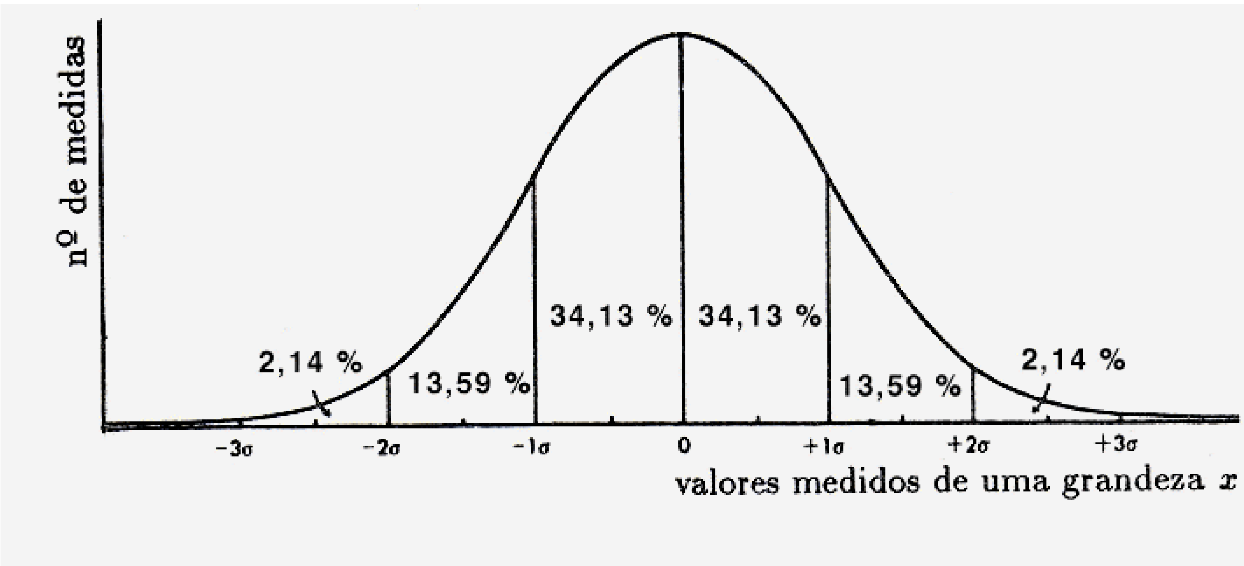
As observações individuais $\mathbf{q_k}$ diferem em valor por causa de variações aleatórias nas grandezas de influência dos efeitos aleatórios. A **variância experimental** $\mathbf{s^2(q_k)}$ das observações é dada por:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \qquad (2)$$

A raiz quadrada positiva desta variância **$s(q_k)$** é denominada **desvio padrão experimental** e caracteriza a variabilidade dos valores **q_k** observados, mais especificamente, sua dispersão em torno da média. A **variância da média**, $s^2(\overline{q})$ é dada por:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \qquad (3)$$

onde a raiz quadrada positiva de $s^2(\overline{q})$ é o **desvio padrão experimental da média** $s(\overline{q})$. Este valor quantifica quão bem $\overline{q}$ estima o valor esperado de **q** e qualquer um dentre eles pode ser usado como medida da incerteza de $\overline{q}$. Esta estimativa da variabilidade das medidas devido a erros aleatórios por meio do desvio padrão, supõe que a freqüência das medidas obedece à distribuição gaussiana dada na figura abaixo. Nesta figura temos a representação gráfica de uma distribuição normal. Estão indicadas as percentagens de casos por **desvio padrão $\sigma = s(q_k)$**.



Como expressar o resultado das medidas:

O procedimento estatístico usualmente indicado para o tratamento de medidas experimentais consiste justamente em fazer os cálculos acima indicados e expressar o valor de uma grandeza **q** usando os dados obtidos com as relações (1) e (3):

Valor da grandeza = média das n medidas ± desvio padrão da média

$$q = \overline{q} \pm s(\overline{q}) \quad (4)$$

O uso das expressões acima pressupõe que, durante a realização de uma série de medidas, não ocorreram erros grosseiros, que os erros sistemáticos ou estiveram ausentes, ou foram devidamente compensados, ou são de ordem de grandezas inferior aos erros aleatórios; e que todas as demais fontes de erro contribuíram aleatoriamente, ora para aumentar, ora para diminuir o valor da grandeza.

Ainda pode-se representar o desvio padrão da média na seguinte forma:

$$q = \overline{q} \pm \frac{s(\overline{q})}{\overline{q}} 100\% \quad (5)$$

Como avaliar os algarismos significativos:

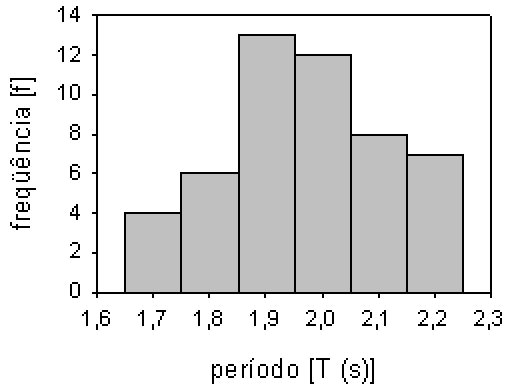
Para avaliar quantos algarismos significativos devem ser usados para representar o desvio padrão da medida e o desvio padrão da média, usamos as seguintes expressões:

$$s_{s(q_k)} = \frac{s(q_k)}{\sqrt{2n}} \quad (6) \text{ e } \quad s_{s(\overline{q}_k)} \cong \frac{s(\overline{q}_k)}{\sqrt{2n}} \quad (7)$$

<u>Exemplo 1</u>:

Na tabela abaixo estão listadas as medidas do período **T(s)** de um pêndulo. Foram feitas 50 medidas, sendo que **f** representa a freqüência com que cada medida apareceu. Qual é o período do pêndulo?

f	**T(s)**
4	1,7
6	1,8
13	1,9
12	2,0
8	2,1
7	2,2



Como podemos ver pelo gráfico acima, temos uma distribuição normal de dados e aplicando-se as equações (1), (2) e (3) aos dados da tabela, obtêm-se:

$$\overline{\mathbf{T}} = 1{,}97s$$
$$\mathbf{s(T)} = 0{,}14603606s$$
$$\mathbf{s(\overline{T})} = 0{,}02065262s$$

Esses três valores foram escritos com todos os dígitos fornecidos por uma calculadora. Devemos chamar a atenção de que não faz sentido trabalhar com algarismos além do primeiro afetado de imprecisão. Usando as relações (6) e (7), obtêm-se:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{s(T)}} \cong 0{,}01s$$
$$\mathbf{s}_{\mathbf{s(T)}} \cong 0{,}002s$$

Portanto o **desvio padrão da medida tem o algarismo dos centésimos afetado de imprecisão** e o **desvio padrão da média, o dos milésimos**. Isto permite escrever:

$$\mathbf{s(T)} = 0{,}15s$$
$$\mathbf{s(\overline{T})} = 0{,}021s$$

Estes dois valores determinam dois intervalos de confiança em torno da média (1,97*s*) a saber,

considerando o desvio padrão da medida ($\pm$ 0,15*s*) $\Rightarrow$ (1,82*s*; 2,12*s*)

considerando o desvio padrão da média ($\pm$ 0,021*s*) $\Rightarrow$ (1,949*s*; 1,991*s*)

De acordo com as expressões (4) e (5), pode-se expressar o resultado levando-se em conta o desvio padrão da média, nas duas formas:

T= 1,970 ± 0,021 *s* ou **T= 1,970 ± 1,1%** *s*

Note-se a coerência entre as casas decimais da média e do desvio padrão da média.

Convém ainda observar que é possível diminuir o desvio padrão da média simplesmente aumentando o número de medidas **n**, pois $\mathbf{s(\overline{q}) \approx 1/\sqrt{n}}$, enquanto o desvio padrão da medida e a média devem permanecer aproximadamente iguais com o aumento de **n**. Na prática, em geral, 10 medidas de uma grandeza já são suficientes para obter informações valiosas sobre a média e o desvio padrão da medida e da média.

Desvio padrão e imprecisão de leitura:

A **imprecisão de um instrumento** é a metade da divisão da sua escala, por exemplo, um cronômetro cuja menor divisão é 1/5 segundos tem uma imprecisão de 1/10 segundos. A **imprecisão de uma leitura** estimada é a metade do intervalo que um observador pode estimar.

Nem sempre a imprecisão da leitura estimada por um operador coincide com a imprecisão de um instrumento. Por exemplo, ao medir o ângulo de desvio de um feixe de luz com um transferidor graduado de 2^o, pode-se verificar que o feixe está entre 42^o e 44^o, um pouquinho mais próximo de 42^o do que de 44^o. Qual é a leitura?

- encontrando dificuldades em estimar um intervalo menor do que o da escala usada, o operador deve optar por 42^o. Neste caso, a imprecisão da leitura (1^o) é igual a imprecisão do instrumento.

- o operador pode optar por 43^o, caso se sinta capaz de distinguir entre 42^o, 43^o e 44^o. Neste caso a imprecisão da leitura estimada ($0{,}5^o$) é menor do que a imprecisão do instrumento. Esta medida pode ser feita desde que se consiga discriminar os valores de intervalos de $0{,}5^o$, e esses não violem os limites de imprecisão indicados pelo fabricante do aparelho. Note-se que a imprecisão da leitura estimada depende de fatores relacionados com o equipamento (distância entre os traços da escala, largura dos traços, largura do feixe de luz), bem como de fatores ligados ao operador (acuidade visual, decisão sobre a possibilidade de interpolar leituras entre os traços, etc.).

  ⇒ Não confunda imprecisão de leitura com desvio padrão da medida, que como vimos, é obtido a partir de uma série de medidas.

  A imprecisão de leitura $\boldsymbol{e_L}$ pode ser considerada como uma medida da sensibilidade do sistema de coleta de dados, incluindo instrumento e experimentador.

  Exemplo 2:

  Suponhamos que tenham sido feitas 10 medidas do ângulo de desvio θ de um raio de luz com três equipamentos diferentes. Em conseqüência, as imprecisões de leitura ($\boldsymbol{e_L}$) foram diferentes e obtiveram-se os seguintes dados:

Equip. 1 θ_i (°)	**Equip. 2** θ_i (°)	**Equip. 3** θ_i (°)
42	42,0	42
42	41,9	42
42	41,8	41
42	41,6	42
42	41,7	42
42	41,7	42
42	42,0	41
42	41,7	42
42	41,9	42
42	41,5	42
$\bar{\theta} = 42°$ $s(\theta) = 0°$ $s(\bar{\theta}) = 0°$ $e_L = 1°$	$\bar{\theta} = 41{,}78°$ $s(\theta) = 0{,}17°$ $s(\bar{\theta}) = 0{,}05°$ $e_L = 0{,}05°$	$\bar{\theta} = 41{,}80°$ $s(\theta) = 0{,}42°$ $s(\bar{\theta}) = 0{,}13°$ $e_L = 0{,}5°$

Equipamento 1: a imprecisão de leitura ($e_L = 1^o$; portanto medidas de dois em dois graus) é tão grande que não se observa variação nas medidas obtidas. Neste caso a incerteza não pode ser estimada via desvio padrão, pois tanto o desvio padrão da medida como da média é zero. Neste caso poderíamos pensar que temos precisão infinita, o que é completamente absurdo pois este é o equipamento de menor sensibilidade!!! E além disto nunca teremos precisão infinita, não se esqueça que erros aleatórios não podem ser eliminados totalmente. Em tais casos a incerteza pode ser estimada como a própria imprecisão de leitura, mas tome cuidado pois esta imprecisão não pode ser confundida com o desvio padrão! Este resultado pode ser útil apenas como uma primeira indicação do valor da grandeza média e o experimento pode servir a propósitos, tais como demonstrar as características gerais do fenômeno ou indicar o caminho para medidas mais precisas.

Equipamento 2: a imprecisão de leitura ($e_L = 0{,}05^o$; portanto, medidas intercaladas de décimo em décimo de graus) nos permite observar variações tanto acima como abaixo da média, de modo que os erros de leitura afetaram aleatoriamente os dados. Portanto seus efeitos estão automaticamente incluídos na estimativa do erro aleatório. Neste caso a imprecisão de leitura é claramente inferior ao desvio padrão da medida, e pode-se tranqüilamente utilizar-se dos cálculos para avaliações de incerteza.

Equipamento 3: na prática é comum obterem-se medidas com variabilidade moderada, como as obtidas neste equipamento. Neste caso, o desvio padrão da medida é levemente menor que a imprecisão de leitura e como nas medidas do equipamento 1, também não se pode utilizar os cálculos de desvio padrão para se determinar a incerteza da medida.

É interessante utilizar-se o seguinte critério:

Realizadas diversas medidas de uma grandeza q, calcula-se $s(q)$ *e* $s(\bar{q})$ *e verifica-se a imprecisão de leitura* e_L.

Se $s(q) \geq e_L$, *então pode-se avaliar a incerteza via desvio padrão.*

Se $s(q) < e_L$, *não se pode avaliar a incerteza pelo desvio padrão.*

Determinando a incerteza padrão combinada:

Muitas vezes a grandeza que se quer obter não é medida diretamente, mas determinada indiretamente a partir de cálculo, empregando-se uma relação conhecida, na qual figuram as grandezas medidas diretamente. Existem situações em que todas as grandezas de entrada são independentes, o que chamamos de grandezas não correlacionadas e situações em que duas ou mais grandezas de entrada são correlacionadas. Cada caso será tratado separadamente.

Grandezas de entrada não correlacionadas:

Vamos considerar o mensurando **Y** que não é medido diretamente, mas a partir de **N** outras grandezas $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_N}$, através de uma relação funcional **f**:

$$\mathbf{Y = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_N)} \quad (8)$$

Chamando de **y** a estimativa do mensurando **Y** ($\mathbf{y} = \bar{\mathbf{Y}}$), a incerteza padrão de **y** é obtida pela combinação apropriada de incertezas padrão das estimativas de entrada $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ ($\mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}$). A incerteza padrão combinada $\mathbf{u_c(y)}$ é a raiz quadrada positiva da variância combinada $\mathbf{u_c^2(y)}$, que é dada por:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (9)$$

onde **f** é a função dada na equação (8). Cada $\mathbf{u(x_i)}$ é uma incerteza padrão avaliada como descrito na equação (3). A incerteza padrão combinada $\mathbf{u_c(y)}$ é um desvio padrão estimado e caracteriza a dispersão dos valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando **Y.** Pode-se expressar o resultado na forma:

$$\mathbf{Y = y \pm u_c(y)} \quad (10)$$

<u>Exemplo 3</u>:

Vamos utilizar os dados de $\theta_{\mathbf{i}}$ medidos no equipamento 2, listados na tabela do Exemplo 2. Vamos considerar que estes dados referem-se ao ângulo de difração θ de uma raia colorida de segunda ordem (m = 2) de um espectro obtido com uma rede de difração de 500 linhas /mm. Queremos determinar o comprimento de onda λ desta raia a partir da medição de θ . Notem que λ **é calculado** a partir de uma grandeza que pode ser medida: o ângulo de difração θ .

A fórmula que permite calcular o comprimento de onda λ de um feixe de luz plana incidindo perpendicularmente sobre a rede de difração é:

$$\mathbf{d\,sen\theta = m\lambda \Rightarrow \lambda = f\,(\theta\,),}\ \text{de acordo com a relação (8)}$$

onde **d** é a distância entre as linhas adjacentes, portanto $\mathbf{d = (1/500)\ mm = 2 \times 10^{-6}\ m}$, que vamos considerar como um valor constante. Na tabela, temos que para o equipamento 2,

$$\bar{\theta} = 41{,}78^\circ; \mathbf{u(x)} = \mathbf{s}(\bar{\theta}) = 0{,}05^\circ = 0{,}00087\,\mathbf{rad}$$

e para o comprimento de onda médio teremos:

$$\bar{\lambda} = \frac{\mathbf{d\,sen}\,\bar{\theta}}{\mathbf{m}} = \frac{2 \times 10^{-6}\ \mathbf{sen}\,41{,}78^\circ}{2} = 6{,}6627 \times 10^{-7}\,\mathbf{metros} \quad (= y)$$

$$\mathbf{u_c(y) = u_c}(\bar{\lambda}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\right)^2_{\bar{\theta}} \cdot \mathbf{s}^2(\bar{\theta})} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\mathbf{d\,sen}\,\theta}{\mathbf{m}}\right)_{\bar{\theta}} \cdot \mathbf{s}(\bar{\theta}) = \frac{\mathbf{d\cos}\bar{\theta}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{s}(\bar{\theta}) \quad \text{(ver equação 9 para N=1)}$$

substituindo os valores na equação temos: $\mathbf{u_c}(\bar{\lambda}) = 0{,}006 \times 10^{-7}\,\mathbf{metros}$.

Portanto, o valor do comprimento de onda da raia colorida é dado por:

$$\boldsymbol{\lambda} = (6{,}663 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-7}\,\mathbf{metros} = (666{,}3 \pm 0{,}6)\,\mathbf{nm}$$

Neste exemplo tivemos apenas uma grandeza (θ) medida diretamente para calcular a grandeza (λ) que se pretendia obter.