FIS02012 - Cosmologia

basilio.santiago

Semestre 2020/1

1 Solução de problemas associados aos capítulos iniciais do livro da BR

1.1 - Problema 3.2 do livro BR

Solução:

Se estamos na superfície de uma esfera de raio R, o intervalo invariante é dado pela expressão 3.9 do livro:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 sen^2(\frac{r}{R})d\theta^2$$

onde r é o arco que liga um dado ponto ao ponto origem $r = 0$, chamado de pólo da esfera. Ou seja, a latitude de um ponto, que é o ângulo entre esse ponto e o equador, é dada por

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$$

Já θ é uma coordenada azimutal sobre a superfície, ou seja, equivalente à longitude.

Se nos colocamos no pólo da esfera e temos um objeto de tamanho ds a uma distância fixa r, isso significa que este objeto está paralelo ao equador, sobre um paralelo de latitude, portanto. O seu comprimento ds então é o intervalo invariante para o caso em que $dr = 0$

$$ds = Rsen(\frac{r}{R})d\theta$$

E o ângulo subentendido por este objeto visto do pólo é

$$d\theta = \frac{ds}{Rsen(r/R)}$$

Para estudarmos o comportamento deste diâmetro angular, temos que lembrar que a única variável na expressão acima é a distância r do objeto ao pólo. A latitude ϕ dada acima é definida no domínio $[-\pi/2, +\pi/2]$. Logo, o domínio de r é $[0, \pi R]$, onde $r = 0$ corresponde ao pólo da esfera, origem do sistema de coordenadas, e $r = \pi R$ corresponde ao pólo oposto. Tanto num extremo quanto no outro, temos que $sen(r/R) \rightarrow 0$, de forma que $d\theta \rightarrow \infty$. Isso porque, ao colocarmos o objeto no mesmo pólo onde nos situamos ou no pólo oposto, qualquer meridiano sobre a superfície da esfera irá cruzar com o objeto, o que torna sua dimensão angular infinita. Ou seja, esse objeto cobre todas as direções do nosso espaço 2D.

1.2 - Problema de avaliação anterior

Considere um gás de fótons isolado e em expansão que emite como um corpo negro, ou seja, cuja densidade de energia é $\epsilon_\gamma = \alpha T^4$, onde α é uma constante. Esse é o caso da radiação cósmica de fundo. Lembrando que a energia total num volume V é $E = \epsilon_\gamma \; V$ e que a pressão dos fótons é dada por $P = \epsilon_\gamma/3 = \alpha T^4/3$, use a primeira lei da Termodinâmica (lembrando ainda que este gás está isolado, $dQ = 0$) e mostre que

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3V}\frac{dV}{dt}$$

Feito isso e lembrando que $V = V_0 a^3$, prove então que

$$T(a) = \frac{T_0}{a}$$

onde T_0 é a temperatura do gás no instante presente, em que $a = 1$.

Solução:

A primeira lei da Termodinâmica para um gás isolado é

$$dE = -PdV$$

$$d(\alpha T^4 V) = -PdV$$

$$\alpha 4VT^3 dT + \alpha T^4 dV = -PdV$$

$$\alpha 4VT^3 dT + \alpha T^4 dV = -\frac{\epsilon_\gamma}{3} dV$$

$$\alpha 4VT^3 \frac{dT}{dt} + \alpha T^4 \frac{dV}{dt} = -\frac{\epsilon_\gamma}{3} \frac{dV}{dt}$$

$$4\epsilon_\gamma \frac{V}{T} \frac{dT}{dt} + \epsilon_\gamma \frac{dV}{dt} = -\frac{\epsilon_\gamma}{3} \frac{dV}{dt}$$

$$4\epsilon_\gamma \frac{V}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{4\epsilon_\gamma}{3} \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}$$

Substituindo agora $V = V_0 a^3$ no lado direito temos

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{3a^2 \dot{a}}{3a^3} = -\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

$$dln(T) = -dln(a) \ \rightarrow \ T \propto 1/a$$

Fazendo $T_0 = T(t_0)$ (ou seja, T_0 é a temperatura do gás de fótons no instante presente) e lembrando que $a(t_0) = 1$, temos finalmente

$$T(a) = \frac{T_0}{a}$$

1.3 - Problema avulso

Na seção 4.2 do livro BR, a equação dos fluidos é obtida a partir da 1a Lei da Termodinâmica para um fluido isolado, em processo adiabático de expansão. A partir da equação dos fluidos e da equação de Friedmann-Lemaître, obtém-se então a equação da aceleração. E isso é feito para o caso em que a constante cosmológica é nula ($\Lambda = 0$). Aqui propomos fazer o contrário e sem anular a constante cosmológica.

Derive os dois lados a equação de Friedmann no tempo e prove que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\Big[\epsilon + \frac{a\dot{\epsilon}}{2\dot{a}}\Big] + \frac{\Lambda}{3}$$

Agora use a equação da aceleração tal como a obtivemos a partir das equações de Einstein

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

para então provar a equação dos fluidos, tal como dada na equação 4.39 do livro da BR

Solução:

Começamos pela eq. de FL:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Multiplicando ambos os lados por a^2:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\epsilon a^2}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda a^2}{3}$$

Derivando ambos os lados no tempo:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}a^2 + 2a\epsilon\dot{a}) + \frac{2a\dot{a}\Lambda}{3}$$

Dividindo ambos os lados por $2a\dot{a}$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\frac{\dot{\epsilon}a}{2\dot{a}} + \epsilon) + \frac{\Lambda}{3}$$

Com isso resolvemos a primeira parte do problema. Agora usamos a eq. da aceleração, de forma a obter a igualdade:

$$\frac{8\pi G}{3c^2}(\frac{\dot{\epsilon}a}{2\dot{a}}+\epsilon)+\frac{\Lambda}{3}=-\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon+3P)+\frac{\Lambda}{3}$$

Isso resulta em

$$-2(\frac{\dot{\epsilon}a}{2\dot{a}}+\epsilon)=\epsilon+3P$$

$$-\frac{\dot{\epsilon}a}{\dot{a}}-2\epsilon=\epsilon+3P$$

$$3(\epsilon+P)=-\frac{\dot{\epsilon}a}{\dot{a}}$$

$$\dot{\epsilon}+3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon+P)=0$$

que é a equação dos fluidos, 4.39.

1.4 - Problema de avaliação anterior

a) Utilize a equação da aceleração e determine o valor de w da equação de estado que produz uma aceleração nula (ou seja, $\ddot{a}=0$), no caso de um Universo com apenas um componente e com constante cosmológica nula.

b) Determine então a dependência da densidade de energia deste componente do Universo com o fator de escala.

c) Finalmente, considerando um Universo de geometria plana ($k = 0$) contendo matéria e este componente, deduza o fator de escala para a época de equilíbrio em função do parâmetro de densidade da matéria, $\Omega_{m,0}$.

Solução:

A equação da aceleração é

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

Já a equação de estado nos dá a relação entre a pressão interna do componente, P, e a densidade de energia, ϵ: $P = w\epsilon$. Logo, fazendo também $\Lambda = 0$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3w\epsilon) = \frac{4\pi G\epsilon}{3c^2}(1 + 3w)$$

Vemos então que $\ddot{a} = 0$ se $w = -1/3$.

Para saber a relação $\epsilon(a)$ vamos usar a equação dos fluidos

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0$$

$$\dot{\epsilon} + 2\frac{\dot{a}}{a}\epsilon = 0$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -2\frac{da}{a}$$

$$d(ln\epsilon) = d(lna^{-2})$$

$$\epsilon = \epsilon_0 a^{-2}$$

Compare isso ao comportamento de ϵ para outros constituintes conhecidos do Universo: i) matéria não-relativística: $w = 0 \rightarrow \epsilon_m = \epsilon_{m,0} a^{-3}$; ii) radiação: $w = 1/3 \rightarrow \epsilon_r = \epsilon_{r,0} a^{-4}$; iii) constante cosmológica: $w = -1 \rightarrow \epsilon_\Lambda = \epsilon_{\Lambda,0} = cte$.

Finalmente, se temos este componente e matéria não-relativística no Universo, cuja densidade de energia varia com a^{-3}, haverá igualdade entre as densidades de energia dos dois componentes para o fator de escala dado pela igualdade abaixo.

$$\epsilon_0 a_{eq}^{-2} = \epsilon_{m,0} a_{eq}^{-3}$$

$$a_{eq} = \frac{\epsilon_{m,0}}{\epsilon_0} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_0}$$

Mas se o Universo é plano ($k = 0$), sabemos que a densidade total $\epsilon_0 + \epsilon_{m,0} = e_{c,0}$, onde $e_{c,0}$ é a densidade crítica no presente. Logo, dividindo ambos os lados pela densidade crítica, temos que $\Omega_0 + \Omega_{m,0} = 1$. E assim, a era de equilíbrio ocorrerá para o fator de escala:

$$a_{eq} = \frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}}$$

1.5 - Problema de avaliação anterior

Considerando-se que a relação entre fator de escala e redshift é

$$a(t) = \frac{1}{1 + z(t)}$$

a) Prove inicialmente que

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2}\frac{dz}{dt}$$

b) Prove também, usando o ítem anterior e a relação entre a e z, que

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z)$$

c) finalmente, mostre que o horizonte em unidades comóveis num dado instante, $r_H(t)$, é dado por

$$r_H(t) = c\int_{z(t)}^{\infty} \frac{dz'}{H(z')}, \qquad (1)$$

Solução:

a) Basta derivar com relação ao tempo os dos lados da equação.

b)

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)^2\dot{a} = -(1+z)^2 H(t)a(t) = -(1+z)H(t)$$

c) Por definição, o horizonte observável, em coordenadas comóveis, quando a idade do Universo é t é igual a

$$r_H(t) = c\int_0^t \frac{dt}{a}$$

Mas temos o resultado do ítem anterior. Além disso sabemos que $t = 0 \quad \rightarrow \quad z = \infty$ e $t = t \ \rightarrow \ z = z(t)$. Logo:

$$r_H(t) = -c\int_{\infty}^{z(t)} \frac{1}{a}\frac{dz}{(1+z)H(z)} = c\int_{z(t)}^{\infty}(1+z)\frac{dz}{(1+z)H(z)}$$

$$r_H(t) = c \int_{z(t)}^{\infty} \frac{dz}{H(z)}$$

2 Solução de problemas associados aos Cap. 5 e 6 do livro da BR

2.1 - Problema de avaliação anterior Seja um Universo espacialmente plano e que contém um único componente com parâmetro da equação de estado w. Pode-se demonstrar que o fator de escala neste caso é dado por

$$a(t) = (t/t_0)^{2/(3+3w)}$$

a) Prove então que a distância própria no momento presente t_0 é dada por

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a}$$

$$d_p(t_0) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{(1+3w)/(3+3w)}\right]$$

b) Levando em conta a relação entre redshift z e o fator de escala, derive então

que

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}\Big[1-(1+z)^{-(1+3w)/2}\Big]$$

Solução:

a)

$$d_p(t_0) = c\ \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = c\ \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/(3+3w)} dt$$

$$d_p(t_0) = ct_0^{2/(3+3w)}\ \int_{t_e}^{t_0} t^{-2/(3+3w)}dt$$

$$d_p(t_0) = c\frac{3+3w}{1+3w}t_0^{2/(3+3w)}\ t^{(1+3w)/(3+3w)}|_{t_e}^{t_0}$$

$$d_p(t_0) = c\frac{3+3w}{1+3w}t_0^{2/(3+3w)}[t_0^{(1+3w)/(3+3w)} - t_e^{(1+3w)/(3+3w)}]$$

$$d_p(t_0) = c\frac{3+3w}{1+3w}t_0\Big[1-\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{(1+3w)/(3+3w)}\Big]$$

b)

$$a(t_e) = \frac{1}{1+z} = \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/(3+3w)}$$

$$1 + z = \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{-2/(3+3w)}$$

$$\left(\frac{t_e}{t_0}\right) = (1 + z)^{-(3+3w)/2}$$

$$\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{(1+3w)/(3+3w)} = (1 + z)^{-(1+3w)/2}$$

Logo, usando o resultado do ítem a), a distância própria no instante atual de uma fonte com *red-shift* z fica:

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0(1 + 3w)}\left[1 - (1 + z)^{-(1+3w)/2}\right]$$

2.2 - Problema de avaliação anterior

Considere um modelo de Universo espacialmente plano (k=0) e que contenha apenas radiação .

a) Escreva a equação de Friedmann para este modelo.

b) Prove que

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

onde $t_0 = 1/(2H_0)$

c) Prove que a distância própria na época atual é dada por

$$d_p(t_0) = 2ct_0\left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/2}\right] = \frac{c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{(1+z)}\right]$$

Solução:

a) Equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

para o caso plano e só com radiação fica:

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon_r(t)}{3c^2}$$

Mas para a radiação eletromagnética (EM), a equação de estado é $P = \epsilon_r/3$. E pela equação dos fluidos, isso nos dá uma dependência da densidade de energia com o fator de escala

$$\epsilon_r = \epsilon_{r,0} a^{-4}$$

Substituindo na equação de Friedmann, temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon_{r,0} a^{-4}}{3c^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\epsilon_{r,0}a^{-2}}{3c^2}$$

$$\dot{a} = \pm\left[\frac{8\pi G\epsilon_{r,0}}{3c^2}\right]^{1/2} a^{-1}$$

O sinal negativo corresponde a um Universo em contração. Vamos ficar apenas com a solução de um Universo em expansão.

b)

$$ada = \left[\frac{8\pi G\epsilon_{r,0}}{3c^2}\right]^{1/2} dt$$

$$\frac{a^2}{2} = \left[\frac{8\pi G\epsilon_{r,0}}{3c^2}\right]^{1/2} t$$

Ao integrar os dois lados da equação de Friedmann usamos a condição de contorno de que $a(t = 0) = 0$. Podemos também substituir o termo na raiz quadrada pela constante de Hubble H_0.

$$\frac{a^2}{2} = H_0 t \;\rightarrow\; a(t) = \sqrt{2H_0 t} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

onde $t_0 = 1/2H_0$.

c) O caso de um Universo só com radiação EM, corresponde a usar $w = 1/3$ nos resultados do problema anterior. Em particular, a expressão final do ítem b) do problema anterior

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}\left[1 - (1+z)^{-(1+3w)/2}\right]$$

então fica:

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{2H_0}\left[1 - (1+z)^{-1}\right] = \frac{c}{H_0}\left[1 - (1+z)^{-1}\right]$$

2.3 - Problema de avaliação anterior

Seja um Universo espacialmente plano e dominado por matéria não relativística.

a) Prove que para este caso, a equação de Friedmann é dada por

$$H^2 = H_0^2 \Omega_{m,0}\ a^{-3}$$

b) Use então o resultado do problema anterior para provar que o horizonte em função do *redshift* neste caso é dado por

$$r_H(z) = \frac{2c}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)}}, \tag{2}$$

Solução:

Comecemos pela equação de Friedmann-Lemaître para o caso de geometria plana ($k = 0$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Como a matéria é que domina a dinâmica, vamos também fazer $\Lambda = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2}$$

Finalmente, sabemos que para a matéria, $\epsilon = \epsilon_0 a^{-3}$. Logo teremos

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon_0 a^{-3}}{3c^2}$$

Mas sabemos também que a densidade crítica é $\epsilon_c = 3c^2H^2/8\pi G$. Exprimindo-a para o instante presente em função de H_0 e substituindo na equação, temos

$$H^2 = \frac{H_0^2\epsilon_0 a^{-3}}{\epsilon_{c,0}} = H_0^2\Omega_0 a^{-3}$$

Tirando a raiz quadrada e exprimindo em função do *redshift* z temos

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_0}(1+z)^{3/2}$$

Usemos agora a expressão para o horizonte a um dado z do problema anterior

$$r_H(t) = c\int_{z(t)}^{\infty}\frac{dz}{H(z)} = \frac{c}{H_0\Omega_0^{1/2}}\int_{z(t)}^{\infty}(1+z)^{-3/2}dz$$

$$r_H(t) = -\frac{2c}{H_0\Omega_0^{1/2}}(1+z)^{-1/2}|_z^{\infty}dz$$

$$r_H(t) = \frac{2c}{H_0\Omega_0^{1/2}}(1+z)^{-1/2}$$

2.4 - Problema de avaliação anterior

Usando a equação final do problema anterior, mostre que:

a) o horizonte físico (ou próprio, levando em conta o tamanho do Universo) a um dado *redshift* z **é**

$$d_{H,p}(z) = a(z)r_H(z) = \frac{2c}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}}(1+z)^{-3/2}$$

b) que a escala angular do horizonte a um dado *redshift* $z >> 1$ **é**

$$\theta_H = \frac{d_{H,p}(z)}{d_A(z)} \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{z}\right)^{1/2}$$

Para isso use a seguinte expressão para a distância por diâmetro angular (a ser vista em mais detalhe no Cap. 7 do livro BR) de uma fonte de *redshift* $z >> 0$

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_{m,0} z}$$

c) Determine então a escala angular do horizonte na era do desacoplamento entre matéria e radiação, $z_d \simeq 1100$**, em função de** $\Omega_{m,0}$

d) Sabendo que essa escala foi determinada como sendo $\simeq 1^o$ **usando o espectro de potência da radiação cósmica de fundo, determine o valor de** $\Omega_{m,0}$ **resultante.**

Solução:

a) Para obter o raio físico do horizonte, precisamos apenas multiplicar r_H obtido no problema anterior por $a = 1/(1+z)$. Logo:

$$d_{H,p}(z) = \frac{2c}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}}} (1+z)^{-3/2}$$

b) O tamanho angular do horizonte observável a um dado z é seu tamanho físico dividido pela distância de diâmetro angular àquele z, a ser estudada no Cap. 7 do livro BR, e cuja expressão para altos *redshifts* é dada no enunciado:

$$\theta_H(z) = \frac{d_{H,p}(z)}{d_A(z)} = \frac{2c}{H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}} z^{-3/2} \, \frac{H_0 \Omega_{m,0} z}{2c} = \frac{\Omega_0^{1/2}}{z^{1/2}}$$

c) Se fizermos $z = 1100$, temos

$$\theta_H(z) = \frac{\Omega_{m,0}^{1/2}}{1100^{1/2}} \simeq \frac{\Omega_{m,0}^{1/2}}{33}$$

d) Se $\theta_H = 1^o = \pi/180$ rad , temos

$$\Omega_{m,0} \simeq \frac{1100\pi^2}{180^2} = 0.33$$

2.5 - Problema de avaliação anterior

Use a equação de Friedmann para mostrar que

$$1 - \Omega_T(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

onde

$$\Omega_T(t) = \frac{8\pi G \epsilon_T(t)}{3c^2 H^2}$$

é o parâmetro de densidade total a um instante t.

b) Mostre agora que a razão entre os desvios dos parâmetros de densidade atual e no passado com relação à unidade é

$$\frac{1-\Omega_T(t_0)}{1-\Omega_T(t)} = \frac{a^2H^2}{H_0^2}$$

c) Use novamente a eq. de Friedmann para escrever essa razão no passado (em que radiação ou matéria dominavam) como sendo

$$\frac{1-\Omega_T(t_0)}{1-\Omega_T(t)} = \Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2}$$

d) Calcule então a razão dos desvios com relação à unidade atual e para a era de equilíbrio entre matéria e radiação, $a_{rm} = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0}$. Use para isso os valores $\Omega_{r,0} = 8.4\ 10^{-5}$ e $\Omega_{m,0} = 0.3$

Solução:

Começando pela equação FL:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Vamos incorporar o termo da constante cosmológica como sendo mais um componente do Universo, com densidade de energia constante $\epsilon_\Lambda = (\Lambda c^2)/(8\pi G)$. Aí a equação FL fica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\epsilon_T(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

onde ϵ_T é a densidade de energia somada de todos os componentes do Universo.

Lembrando que a densidade de energia crítica é definida como aquela que o Universo tem a cada instante para que $k = 0$:

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2 H(t)^2}{8\pi G}$$

. Logo, sempre podemos dividir a equação FL por H^2 e exprimí-la em termos de ϵ_c

$$1 = \frac{\epsilon_T(t)}{\epsilon_c(t)} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

Mas

$$\Omega_T(t) = \frac{\epsilon_T(t)}{\epsilon_c(t)}$$

, de forma que temos então

$$1 - \Omega_T(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

b) Se avaliarmos a equação FL na forma acima num instante genérico t e na época atual t_0 e tomarmos a razão entre as duas, teremos

$$\frac{1 - \Omega_T(t_0)}{1 - \Omega_T(t)} = \frac{a(t)^2 H(t)^2}{H_0^2}$$

Como as densidades de energia da radiação , $\epsilon_r(t) = \epsilon_{r,0} a(t)^{-4}$, e da matéria, $\epsilon_m(t) = \epsilon_{m,0} a(t)^{-3}$, enquanto o termo de curvatura depende mais suavemente do fator de escala, e o termo da constante cosmológica, $\epsilon_\Lambda = cte$, quando o Universo era jovem $a(t) \rightarrow 0$, temos que radiação e matéria dominam. Logo a eq. FL pode ser escrita para essa época como:

$$a^2 H^2 = \frac{8\pi G[\epsilon_r(t) + \epsilon_m(t)]a^2}{3c^2}$$

$$\frac{a^2 H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G[\epsilon_r(t) + \epsilon_m(t)]a^2}{3H_0^2 c^2} = \frac{\epsilon_{r,0} a^{-2} + \epsilon_{m,0} a^{-1}}{\epsilon_{c,0}} =$$

$$= \Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2}$$

Mas o lado esquerdo acima vimos ser igual à razão entre os desvios com relação à unidade do parâmetro de densidade nas duas épocas:

$$\frac{1-\Omega_T(t_0)}{1-\Omega_T(t)} = \Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2}$$

O valor dessa razão entre os instantes presente t_0, $(a(t_0) = 1)$, e na era de equilíbrio é então:

$$\frac{1-\Omega_T(t_0)}{1-\Omega_T(t_{eq})} = \Omega_{m,0}a_{eq}^{-1} + \Omega_{r,0}a_{eq}^{-2} = \frac{2\Omega_{m,0}^2}{\Omega_{r,0}} = 2143$$

Ou seja, se hoje o parâmetro de densidade já está na mesma ordem de grandeza que a unidade, então o Universo se originou com Ω_T muito próximo de 1. Esse é o chamado problema da planicidade.

2.6 - Problema 6.4 do livro BR

Solução:

Vimos que para que a quintessência postulada para manter o Universo estático seja repulsiva, temos que ter $w_Q < -1/3$. Isso resulta de fazermos $\ddot{a} = 0$ na equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\epsilon}{3c^2}(1+3w)$$

e a resolvermos para w.

Para avaliar como fica o domínio de w e a curvatura desse Universo estático, vamos olhar a equação de FL:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

onde $\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_Q$. Para manter o Universo estático, temos que impor $\dot{a} = 0$. Como o primeiro termo do lado direito é positivo, o segundo precisa ser negativo. Logo $k = 1$.

E como o Universo é estático, as densidades de energia não mudam, independente de sua dependência com o fator de escala $a(t)$. Assim, qualquer valor de $w_Q < -1/3$ e dentro dos limites possíveis, é válido.

Finalmente, resolvendo a equação acima, com $\dot{a} = 0$, $k = 1$ e $a = 1$, para ϵ_Q temos

$$\epsilon_Q + \epsilon_m = \frac{3c^4}{8\pi G R_0^2}$$

$$\epsilon_Q = -\epsilon_m + \frac{3c^4}{8\pi G R_0^2}$$

Mas para garantir um Universo estático que seja estável, temos que garantir que $\ddot{a} = 0$ também. Logo, a equação da aceleração nos dá:

$$\epsilon_m + \epsilon_Q + 3w_Q\epsilon_Q = 0$$

$$\epsilon_m = -\epsilon_Q(1 + 3w_Q)$$

Substituindo na relação obtida pela equação FL, temos

$$\epsilon_Q = \epsilon_Q(1 + 3w_Q) + \frac{3c^4}{8\pi G R_0^2}$$

$$\epsilon_Q = -\frac{c^4}{8\pi G R_0^2 w_Q}$$

3 Solução de problemas associados ao Cap. 7 do livro da BR

3.1 - Problema 7.1 do BR

Solução:

A uma distância d_L = 0.5km = 500m, o fluxo do pé do urso é

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{10}{4\pi 500^2} = 3.183\ 10^{-6}\ W/m^2$$

A sua magnitude aparente é então:

$$m = -2.5 log \frac{f}{f_x} = -2.5 log \frac{f}{2.53\ 10^{-8}} = -5.25$$

onde f_x é o fluxo que corresponde a $m = 0$ (ou seja, é o ponto zero da escala de magnitudes) e é dado no livro. Já a magnitude absoluta bolométrica será

$$M = m - 5 log \frac{d_L(pc)}{10} = -5.25 - 5 log \frac{0.5}{3.1\ 10^{13}\ 10} = 68.7$$

Se o fluxo do pé do urso à distância $d_L = 0.5$km é o limite de detecção do bolômetro, então esse limite corresponde ao fluxo medido no início do problema, $f = 3.183\ 10^{-6}\ W/m^2$. A distância máxima $d_{L,max}$ para o bolômetro detectar o Sol será dada por:

$$d^2_{L,max} f = (1UA)^2\ f_\odot$$

onde $f_\odot = 1367\ W/m^2$ é o fluxo bolométrico do Sol visto da Terra. Logo:

$$d_{L,max} = 1.5\, 10^8 \left(\frac{1367}{3.183\ 10^{-6}}\right)^{1/2} = 3.1\, 10^{12}\, km = 0.1\, pc$$

No caso da SN, temos $L = 4\ 10^9\ L_\odot$, de forma que distância máxima será:

$$d_{L,max} = 0.1 \times \sqrt{4\ 10^9}\ pc = 6.32\ 10^3\ pc$$

3.2 - Problema 7.4 do BR

Solução:

A expressão 7.50 nos dá

$$m - M = 5logd_L(Mpc) + 25$$

E a expressão 7.51 nos dá

$$d_L = \frac{cz}{H_0}\Big(1 + \frac{1-q_0}{2}z\Big)$$

Substituindo 7.51 em 7.50, temos:

$$m - M = 25 + 5\ log\Big[\frac{cz}{H_0}\Big(1 + \frac{1-q_0}{2}z\Big)\Big]$$

$$m - M = 25 + 5\ log\frac{c}{H_0} + 5logz + 5log\Big(1 + \frac{1-q_0}{2}z\Big)$$

$$m - M = 25 + 5\ log\frac{c(km/s)}{70} - 5\ log\frac{H_0(km/s/Mpc)}{70} +$$

$$+5logz + 5log\Big(1 + \frac{1-q_0}{2}z\Big)$$

$$m-M = 25+18.16-5\,log\frac{H_0(km/s/Mpc)}{70}+5logz+5log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right)$$

$$m-M = 43.16-5\,log\frac{H_0(km/s/Mpc)}{70}+5logz+5log\left(1+\frac{1-q_0}{2}z\right)$$

Fazendo agora $1 + [z(1 - q_0)]/2 = 1 + x$, onde $x = [z(1 - q_0)]/2 << 1$, e usando a aproximação dada no enunciado, temos

$$m-M = 43.16+5\,log\frac{H_0(km/s/Mpc)}{70}+5logz+5\times 0.4343\left(\frac{1-q_0}{2}z\right)$$

$$m-M = 43.16+5\,log\frac{H_0(km/s/Mpc)}{70}+5logz+1.086[z(1-q_0)]$$

3.3 Problema avulso

Seja uma supernova do tipo Ia com luminosidade $L = 5\ 10^9\ L_\odot$.

a) Determine a sua magnitude absoluta bolométrica.

b) Se sua magnitude aparente bolométrica é $m = 20.5$, determine sua distância por luminosidade.

c) Se seu *redshift* é $z = 0.2$, estime o valor do parâmetro de (des)aceleração q_0

com base nessa medida, assumindo $H_0 = 70km/s/Mpc$

Solução:

a) A magnitude absoluta é dada pela expressão

$$M = -2.5log\frac{L}{L_x} = -2.5log\frac{5\ 10^9 L_\odot}{78.7 L_\odot} = -19.51$$

b) Sua distância por luminosidade será

$$d_L = 10\ 10^{0.2(m-M)} = 1.00\ 10^9\ pc = 10^3\ Mpc$$

c) Usando a expressão 7.52 do livro, que é razoávelmente apropriada para $z = 0.2$, temos

$$q_0 = 1 - \frac{m - M - 43.17 - 5log(0.2)}{1.086 \times 0.2} = -0.54$$

3.4 Problema avulso

Deduzir as seguintes passagens do Cap. 7 do livro da BR:

a) A expressão 7.14 a partir de uma expansão de Taylor.

b) A expressão 7.18 a partir da 7.17

c) A expressão 7.19 a partir da 7.18

Solução:

a) Expansão em série de Taylor para $1/a(t)$:

$$\frac{1}{a} \simeq \frac{1}{a}|_{t_0} - \frac{\dot{a}}{a^2}|_{t_0}(t-t_0) - \Big[\frac{\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^3}\Big]|_{t_0}\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$\simeq 1 - H_0(t-t_0) - \Big[\frac{\ddot{a}\ a\ \dot{a}^2}{a^2\ a\ \dot{a}^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2\ a}\Big]|_{t_0}\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

Mas $q_0 = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ avaliado em $t = t_0$. E $H_0 = \dot{a}/a$, também avaliado em $t = t_0$. O primeiro termo entre colchetes é portanto $q_0 H_0^2/a(t_0) = q_0 H_0^2$. Já o segundo termo pode ser identificado como $-2H_0^2$. Logo, a expansão fica

$$\frac{1}{a} \simeq 1 - H_0(t-t_0) + [q_0 H_0^2 + 2H_0^2]\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

$$\simeq 1 - H_0(t-t_0) + H_0^2[\frac{q_0}{2} + 1](t-t_0)^2$$

b) A expressão 7.17 resulta facilmente da expressão 7.14 aplicada à 7.16:

$$z \simeq H_0(t_0 - t_e) + (1 + \frac{q_0}{2})H_0^2(t_0 - t_e)^2$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e mantendo apenas termos de ordem 2 em $t_0 - t_e$, temos que:

$$z^2 \simeq H_0^2(t_0 - t_e)^2 \;\rightarrow\; (t_0 - t_e)^2 \simeq \frac{z^2}{H_0^2}$$

Substituindo esse resultado no segundo termo do lado direito da 7.17, temos:

$$z \simeq H_0(t_0-t_e)+(1+\frac{q_0}{2})H_0^2\frac{z^2}{H_0^2} = H_0(t_0-t_e)+(1+\frac{q_0}{2})z^2$$

E resolvendo para então para o tempo de retrospectiva (ou tempo retroativo):

$$t_0 - t_e = H_0^{-1}[z - (1 + \frac{q_0}{2})z^2]$$

c) Basta agora substituir a expressão 7.18 na expressão 7.15 para $d_p(t_0)$, mantendo apenas termos quadráticos no tempo de retrospectiva:

$$d_p(t_0) \simeq c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2$$

$$\simeq \frac{c}{H_0}[z - (1 + \frac{q_0}{2})z^2] + \frac{cH_0}{2}\frac{z^2}{H_0^2}$$

$$\simeq \frac{cz}{H_0}[1 - \frac{1 + q_0}{2}z]$$

4 Solução de problemas associados aos Cap. 8 e 9 do livro da BR

4.1 - Problema 8.1 do livro da BR

Solução:

Vamos assumir, conforme discussão na seção 8.2 do livro, que 90% da matéria do halo Galáctico é escura. Se a massa da Galáxia dentro de $R = 75$ kpc é $M_G = 8\ 10^{11}\ M_\odot$, então a massa escura é $M_{DM} = 7.2\ 10^{11}\ M_\odot$.

Se essa massa existe na forma de objetos com $10^{-8}\ M_\odot$, então esperamos $N = 7.2\ 10^{19}$ desses BN no halo Galáctico. A densidade numérica média deles é então

$$\overline{n} = \frac{N}{V} = \frac{3N}{4\pi R^3} = \frac{2.16\ 10^{20}}{5.3\ 10^6}\, kpc^{-3} = 4.1\ 10^{13}\, kpc^{-3}$$

A distância média entre dois BNs dessa massa é então $\overline{d} = 2\overline{n}^{-1/3} = 5.8\ 10^{-5}\ kpc = 0.058\ pc = 12000 UA$. Então, a distância esperada do Sol ao BN mais próximo é aproximadamente a metade disso, $\simeq 6000$ UA.

Obviamente, se a matéria escura for feita de MACHOS com massa $10^{-3}\ M_\odot$, a densidade espacial deles será 10^{-5} do valor calculado acima. A distância média ao Sol do MACHO mais próximo será então $\overline{d} = 10^{5/3} \times 6000\, UA = 2.8 \times 10^5\, UA = 1.3\, pc$.

O volume médio ocupado por um candidato a matéria escura é dado por $1/\overline{n}$. O Sol orbita o centro da Galáxia a uma velocidade de $V_\odot \simeq 220$ km/s. Podemos então calcular em quanto tempo (Δt) uma área de $\pi\ 1^2\ UA^2$ em torno do Sol varre o volume no qual se espera encontrar um objeto de matéria escura:

$$V_\odot \Delta t\ \pi\ UA^2 = 1/\overline{n}$$

$$\Delta t(s) = \frac{1}{\overline{n}(UA^{-3}) V_\odot (UA/s) \pi} = \frac{1}{\overline{n}(UA^{-3})} \frac{1}{220x(1.5\ 10^8)^{-1}\pi}$$

$$\Delta t(s) = \frac{2.2\ 10^5}{\overline{n}(UA^{-3})}$$

Para o caso dos BN de $10^{-8}\ M_\odot$, temos que $\overline{n} = 4.7\ 10^{-12}\ UA^{-3}$. Logo $\Delta t = 4.7\ 10^{16}\ s = 1.5\ 10^9$ anos.

Para o caso dos MACHOS de $10^{-3}\ M_\odot$, temos que $\overline{n} = 10^{-13}\ UA^{-3}$. Logo $\Delta t = 2.2\ 10^{18}\ s = 7\ 10^{10}$ anos.

4.2 - Problema 8.5 do livro da BR

Solução:

São $N = 1000$ galáxias dentro de um raio $r_h = 1.5\ Mpc$:

$$\overline{n} = \frac{N}{V} = \frac{3 \times 1000}{4\pi r_h^3} = 70\ Mpc^{-3}$$

Para calcular o livre caminho médio de uma galáxia, $\overline{d}$ novamente usamos:

$$\Sigma\ \overline{d} = 1/\overline{n}$$

$$\overline{d} = \frac{1}{\Sigma \overline{n}} = 14\ Mpc$$

O tempo médio entre colisões será então

$$\Delta t = \frac{\overline{d}}{\sigma} = \frac{14 \times 3.1 \times 10^{19}\ km}{880 km/s} = 4.9{\times}10^{17}\ s = 1.6\ 10^{10}\ anos$$

Esse valor é maior do que o tempo de Hubble, mas não por um fator muito alto. Ou seja, colisões entre galáxias vão ocorrer dentro de um aglomerado rico.

4.3 - Problema avulso

Prove que se o gás quente no interior de um aglomerado de galáxias tem perfil de densidade $\rho(r) = \rho_0 r^{-\alpha}$ e perfil de temperatura uniforme, $T(r) = T_c = cte$, então:

a)

$$M(r) = \frac{kT_c\alpha r}{G\mu m_p}$$

b) $\alpha = 2$

Esse modelo é chamado de esfera singular isotérmica.

Solução:

a) Usaremos a expressão 8.46 do livro da BR:

$$M(r) = -\frac{kT(r)r}{G\mu m_p}\Big[\frac{dln\rho}{dlnr} + \frac{dlnT}{dlnr}\Big]$$

mas para o caso em que $T = T_c \rightarrow dlnT/dlnr = 0$ e em que $\rho(r) = \rho_0 r^{-\alpha} \rightarrow ln\rho(r) = ln\rho_0 - \alpha lnr \rightarrow dln\rho/dlnr = -\alpha$. Logo:

$$M(r) = \frac{kT_c\alpha r}{G\mu m_p}$$

b) Podemos agora trabalhar o lado esquerdo da equação:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')dr'$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^{2-\alpha} dr' = 4\pi\rho_0 \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}$$

Olhando agora a igualdade dada por 8.46, vemos que se o lado direito é linear em r, o esquerdo obviamente também tem que ser. Logo $\alpha = 2$.

4.4 - Problema 9.2 do livro da BR

Pela expressão 2.25 da BR, a densidade de energia associada a fótons emitidos por um corpo negro a uma temperatura T e com frequência ν é

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Dividindo a densidade de energia pela energia de um fóton, $h\nu$, temos a densidade numérica de fótons com frequência ν para o corpo negro à temperatura T:

$$n(\nu, T) = \frac{\epsilon(\nu, T)}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

A densidade total de fótons é obtida integrando-se sobre todas as frequências

$$n(T) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

$n(T)$ é dada pela equação 2.28 da BR

$$n(T) = \frac{19.2\pi k^3}{h^3 c^3} T^3 = \beta T^3$$

Já a fração de fótons com energia igual ou maior do que $Q = 13.6$ eV, será dada pela expressão:

$$f(E > Q) = \frac{\frac{8\pi}{c^3}\int_{Q/h}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu}{n(T)} = \frac{\int_{Q/h}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu}{\beta T^3}$$

Como estamos considerando um regime de temperatura tal que $kT << Q$, podemos simplificar a integral do numerador como sendo

$$\int_{Q/h}^{\infty} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \int_{Q/h}^{\infty} \nu^2 e^{-h\nu/kT} d\nu$$

$$= -\frac{[\frac{h^2\nu^2}{k^2T^2} + 2\frac{h\nu}{kT} + 2]e^{-h\nu/kT}}{\frac{h^3}{k^3T^3}}\Bigg|_{Q/h}^{\infty}$$

$$= \frac{k^3T^3}{h^3}[\frac{Q^2}{k^2T^2} + 2\frac{Q}{kT} + 2]e^{-Q/kT}$$

Substituindo na expressão para a fração temos então

$$f(E > Q) = \frac{\frac{8\pi k^3T^3}{c^3h^3}[\frac{Q^2}{k^2T^2} + 2\frac{Q}{kT} + 2]e^{-Q/kT}}{\beta T^3}$$

$$f(E > Q) = \frac{8}{19.2}[\frac{Q^2}{k^2T^2} + 2\frac{Q}{kT} + 2]e^{-Q/kT}$$

No caso em que $T = T_{rec} = 3740$K, temos que $kT = 0.32228$ eV. Substituindo então na expressão acima temos

$$f(E > Q) = 3.35 \times 10^{-17}$$

4.5 - Problema 9.4 do livro da BR

Começamos usando a relação entre $d_p(t_0)$, d_L e d_A para um universo plano, dado pela eq. 7.38 do livro da BR:

$$d_p(t_0) = \frac{d_L}{1+z} = d_A(1+z)$$

Aplicando agora o resultado da seção 9.4, expressão 9.43:

$$d_A \simeq 13\ Mpc$$

e usando $z_{ls} = 1100$, temos então que $d_p(t_0) \simeq 14\ Gpc \simeq d_{hor}$ e $d_L \simeq 15730\ Gpc$

4.6 - Problema de avaliação anterior

Façamos uma discussão qualitativa sobre os processos de interação da radiação de fundo com a matéria bariônica.

a) Se a seção de choque de espalhamento Thomson, σ_e, fosse menor do que é, o que

ocorreria com a era do desacoplamento: ela ocorreria mais cedo ou mais tarde na história do Cosmos? Explique.

b) E se o potencial de ionização do H fosse menor do que 13.6 eV, o que poderíamos esperar da era da recombinação? Explique.

c) E se a razão entre o número de bárions e o número de fótons fosse menor, o que esperar das eras de recombinação e desacoplamento: ocorreriam mais cedo ou mais tarde? Explique.

Solução:

a) Se σ_e tivesse um valor menor, a taxa de reações Γ seria também menor do que foi em cada instante. A igualdade representada por $\Gamma = H$ ocorreria mais cedo, portanto.

b) Se Q fosse menor, haveria mais átomos de H ionizados a cada instante, de forma que o fator de ionização X seria maior. Isso retardaria o instante em que $X = 1/2$.

c) Caso houvesse ainda mais fótons por bárion, haveria proporcionalmente mais fótons capazes de ionizar o H também. Isso faria X novamente maior a cada instante, o que novamente retardaria a recombinação e, por conseguinte, o desacoplamento.

5 Solução de problemas associados ao Cap. 10 do livro da BR

Na verdade, aqui iremos dar dicas de solução de cada um dos problemas do Cap. 10 do livro.

10.1) Aqui estamos avaliando as consequências de os neutrons decaírem muito mais rápido. Qualitativamente, esperamos então que quando $t = t_{nuc} \simeq 200$s, haja muito menos n nesse caso. De forma que a razão $f = n_n/n_p$ seja então muito menor. Obviamente a razão entre eles em $t_{freeze} \simeq$ 1s não muda, pois a condição $\tau_n >> t_{freeze}$ continua válida. E nem mudam os valores de t_{freeze} e t_{nuc}. Então o valor de Y_{max} dado por 10.21 não muda. Apenas a correção devida ao decaimento β, dada por 10.32, precisa ser revista.

10.2) Qualitativamente, podemos concluir, sem fazer qualquer cálculo, que $f = n_n/n_p$ vai ser tão maior quanto menor for a diferença de energia entre prótons e neutrons. Então se seguirmos o mesmo raciocínio que levou até o valor de Y_{max} dado por 10.21, esperamos um valor maior do que aquele.

Quantitativamente, queremos seguir o mesmo raciocínio que levou à 10.21. Ou seja, usar a equação 10.17 para o caso em que $B_n = 0.129$ MeV. Vamos também aplicar a mesma fórmula para $Y_{max} = 2f/(f+1)$. Essa fórmula é deduzida no problema 10.5. Devemos também aplicar a correção devida ao decaimento dos neutrons livres até o instante t_{nuc} em que a metade deles se agrega a núcleos de D, dada pela expressão 10.32. Como $t_{nuc} \simeq 200$s não muda (pois depende da energia de ligação do D), a exponencial que aparece na expressão é a mesma. Mas temos que modificar os valores que aparecem no numerador e no denominador, para refletir a nova razão n_n/n_p calculada. E aí calcular Y_{max}.

10.3) O valor de ϵ_r num dado instante depende apenas da temperatura da radiação, pois $\epsilon_r = \alpha T^4$, ver expressões 2.26 e 2.27 do BR. Então $\epsilon_{nuc} = \alpha T^4_{nuc}$.

Use então a eq. de FL para o caso em que apenas há radiação. Você tem o lado direito para t_{nuc}, então pode calcular o lado esquerdo, H_{nuc}.

Agora use a expressão 5.64 para um universo só com radiação. Mostre que $H = \dot{a}/a = 1/2t$.

Então estime t_{nuc}.

Sabendo que $T = T_0/a \ \rightarrow \ T_0 = T_{nuc}a_{nuc}$. Usando o valor de t_0 do enunciado, determine primeiro o valor de $a_{nuc} = (t_{nuc}/t_0)^{1/2}$. Estime então o valor de T_0, já que você conhece T_{nuc} e a_{nuc}.

Sabemos que a eq. 5.64 não é válida até o dia presente. Para avaliar qualitativamente o que acontece durante a era dominada pela matéria, temos que saber se o Universo vai se expandir mais ou menos do que se o Universo fosse dominado por radiação até o presente. Como $a(t_0) = 1$ sempre, a resposta a essa pergunta vai nos obrigar a rever, para baixo ou para cima, o valor de a_{nuc}. Respondida essa pergunta, temos como responder o que acontece com $T_0 = T_{nuc}a_{nuc}$.

10.4) Esse problema nos permite avaliar até que ponto a fração primordial de massa em núcleos de He, Y, mudou em função dos processos de nucleossíntese estelares posteriores. Com a luminosidade L da Galáxia e sua idade τ, podemos estimar a quantidade de energia EM produzida por ela em toda sua história. Sabendo a energia liberada por uma reação de fusão de H em He, podemos estimar quantas dessas reações ocorreram no interior da Galáxia. Isso nos dá o acréscimo Δn_{He} devido à nucleossíntese estelar. Esse incremento obviamente tem que ser acompanhado de um decréscimo no número de núcleos de H, $\Delta n_H = -4\Delta n_{He}$. Podemos então escrever expressões para as abundâncias primordiais e atuais de He:

$$Y_i = \frac{m_{He,i}}{m_{H,i} + m_{He,i}} = \frac{4m_p n_{He,i}}{m_p n_{H,i} + 4m_p n_{He,i}} = \frac{4n_{He,i}}{n_{H,i} + 4n_{He,i}}$$

e

$$Y_f = \frac{4n_{He,f}}{n_{H,f} + 4n_{He,f}} = \frac{4(n_{He,i} + \Delta n_{He})}{n_{H,i} - 4\Delta n_{He} + 4(n_{He,i} + \Delta n_{He})} =$$

$$= \frac{4(n_{He,i} + \Delta n_{He})}{n_{H,i} + 4n_{He,i}} = Y_i + \frac{4\Delta n_{He}}{n_{H,i} + 4n_{He,i}}$$

Mas sabemos que o número de bárions se preserva, de forma que $n_{H,f} + 4n_{He,f} = n_{H,i} + 4n_{He,i} = M_G/m_p$, onde M_G é a massa bariônica da Galáxia e m_p é a massa do próton. Daí portanto termos todas as condições de estimar a correção dada pelo 2o termo do lado direito.

10.5) Usemos a mesma expressão que no problema anterior, enfatizando agora que ela nos dá o valor máximo de abundância do He, assumindo que todos os n livres vão parar em núcleos desse elemento:

$$Y_{max} = \frac{m_{He}}{m_H + m_{He}} = \frac{4n_{He}}{n_H + 4n_{He}}$$

Mas sabemos que $n_H = n_p - n_n$ (ou seja, o número final de núcleos de H será o excesso de prótons com relação aos neutrons) e que $n_{He} = n_n/2$ (pois todos os n vão parar em núcleos de He, sendo que cada um desse núcleos conterá 2 neutrons). Daí é só substituir.