FIS02012 - Cosmologia

basilio.santiago

Semestre 2020/1

1 Princípio Cosmológico

Fizemos uma dedução das equações de Friedmann-Lemaitre usando o caso de um espaço plano em expansão/contração uniforme ditada por um fator de escala monotonicamente dependente do tempo apenas, $a(t)$, de acordo com a métrica:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

Um espaço com o intervalo acima não apenas é plano. Pode se provar que ele é homogêneo e isotrópico. Ou seja, todos os pontos e todas as direções são iguais, não havendo nenhum ponto ou direção no espaço que seja especial de alguma forma. Inclusive, a parte espacial do intervalo expresso em coordenadas cartesianas depende apenas do tempo e não das coordenadas espaciais. A expansão do espaço é ditada apenas pelo fator de escala dependente do tempo. Qualquer distância irá então evoluir com a(t) e qualquer superfície aumentará no tempo de acordo com $a^2(t)$.

A noção de um Universo homogêneo e isotrópico é na verdade adotada como um princípio. O Princípio Cosmológico diz justamente isso, que o Universo é, em escalas espaciais suficientemente grandes. homogêneo e isotrópico. Isso significa que as propriedades do Universo são as mesmas em torno de qualquer ponto e para qualquer direção, podendo apenas variar no tempo. A Cosmologia baseada no Princípio Cosmológico será chamada de Cosmologia Padrão.

Vimos que as equações tensoriais de Einstein

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu},$$

quando usadas para essa métrica acima e para um tensor energia-momentum de um fluido perfeito, resultam nas Equações de Friedmann-Lamaître:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

onde $\epsilon = \rho c^2$ é a densidade de energia do fluido em expansão (sendo ρ a densidade equivalente de matéria), P é a pressão interna do fluido e Λ é a chamada constante cosmológica. Como o fluido necessariamente se expande de forma homogênea e isotrópica, ϵ e p dependem apenas do tempo, assim como o fator de escala. Outra observação importante é que nas expressões acima, contrariamente ao que fizemos na dedução inicial das equações de Friedmann-Lemaître, estamos carregando a velocidade da luz c explicitamente.

2 Curvatura

Mas há um termo adicional na primeira das equações Friedmann quando levamos em conta a possibilidade de o espaço ter curvatura:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

onde k é a chamada constante de curvatura, a qual pode assumir três valores: -1,0,1. E R é o raio de curvatura do espaço, novamente uma função do tempo apenas. Esse termo remete ao conceito de curvatura como sendo algo inversamente proporcional a um raio. Por exemplo, se temos uma curva qualquer no espaço, podemos sempre ajustar um círculo à curva nas vizinhanças de um dado ponto P da curva. Se o círculo tem raio R, dizemos que a curvatura K, entendida como desvio da curva com relação a uma linha reta, é dada por

$$K = \frac{1}{R}$$

Ou seja, quanto maior R menor a curvatura, de forma que a curva mais se aproxima de uma reta.

Podemos estender esse conceito para uma superfície de maior dimensionalidade. No caso de uma superfície de duas dimensões, podemos fazer a curvatura igual a

$$K = K_1 \ K_2 = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$$

onde temos agora dois raios de curvatura, um para cada coordenada sobre a superfície, sendo que a curvatura K em dado ponto da superfície será o produto das curvaturas K_1 e K_2 ao longo de cada direção espacial. Essa é a chamada curvatura Gaussiana. A superfície de uma esfera é um exemplo de superfície cuja curvatura Gaussiana é a mesma em todos os pontos, sendo igual a

$$K_{Esf.} = \frac{1}{R^2}$$

onde R é o raio da esfera. Um outro exemplo de superfície em 2D seria uma sela de cavalo, com curvatura côncava numa direção e convexa na outra. No ponto central da sela então a curvatura será

$$K_{sela} = -\frac{1}{R_1 R_2}$$

onde o sinal negativo vem do fato de que um dos raios de curvatura é expresso como negativo e o outro positivo.

De forma geral, a curvatura Gaussiana pode então ser escrita como

$$K = \frac{k}{R_1 R_2}$$

onde $k = -1, 0, 1$ dependendo de a curvatura K ser negativa (em que o exemplo em 2D mais trivial é a sela de cavalo), nula ($k = 0$ ou, equivalentemente, com raios de curvatura infinitos, equivalente a um espaço plano) e positiva (em que o exemplo 2D mais trivial é a superfície de uma esfera). Note que num espaço que tem o mesmo raio de curvatura em todas as direções, que é condição necessária para um espaço isotrópico, temos $K =$

k/R^2, como aparece na equação da Cosmologia padrão.

Outro detalhe é que o raio de curvatura do espaço no caso de um universo em expansão homogênea e isotrópica, assim como qualquer escala de tamanho, vai variar com o fator de escala, de forma que

$$R(t) = R_0 a(t)$$

onde $R_0 = R(t_0)$, sendo t_0 o instante em que o fator de escala é 1, ou seja, $a(t_0) = 1$. É comum arbitrarmos esse instante t_0 como sendo a idade atual do Universo.

Substituindo na eq. de Friedmann-Lemaître, temos então

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

A métrica que resulta na equação acima diretamente pela aplicação das equações de Einstein a um fluido perfeito é

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2]$$

Ela é tradicionalmente chamada de métrica de Robertson-Walker.

Notem que exprimimos o intervalo em coordenadas esféricas ao invés de cartesianas. Mas é fácil mostrar que quando fazemos $k = 0$, temos

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2] =$$

$$= -c^2dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

Ou seja, esse é o caso do espaço plano, que usamos para deduzir as equações da Cosmologia. Se fôssemos utilizar a métrica mais geral, com $k \neq 0$, mais facilmente expressa em coordenadas esféricas, teríamos um trabalho bem maior do que o que tivemos para chegar às equações da Cosmologia padrão no caso sem curvatura e usando Cartesianas. Isso porque teríamos, por exemplo, muito mais símbolos de Christofell não nulos usando coordenadas esféricas e fazendo $g_{rr} = 1/(1-kr^2/R_0^2)$, ao invés de simplesmente $g_{rr} = a^2(t)$.

Transformação de coordenadas

Seja um Universo com curvatura positiva, $k = +1$.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1 - r^2/R_0^2} + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2]$$

Fazendo $r/R_0 = sen(r'/R_0)$, temos que $dr = cos(r'/R_0)\ dr'$, $dr^2 = cos^2(r'/R_0)\ dr'^2 = [1 - sen^2(r'/R_0)]dr'^2$.

E o intervalo fica

$$ds^2 = -c^2dt^2+a^2(t)[\frac{cos^2(r'/R_0)dr'^2}{cos^2(r'/R_0)}+R_0^2sen^2(r'/R_0)d\theta^2$$

$$+R_0^2sen^2(r'/R_0)sen^2\theta d\phi^2]$$

$$ds^2 = -c^2dt^2+a^2(t)\{dr'^2+R_0^2\,sen^2(r'/R_0)[d\theta^2+sen^2\theta d\phi^2]\}$$

Se analisarmos o exercício 6.33 do livro do Bernard Schutz, veremos que esse intervalo corresponde ao intervalo medido entre dois pontos sobre a superfície tridimensional de uma esfera quadri-dimensional em que $R(t) = a(t)R_0$ é o raio de curvatura dessa esfera.

De forma perfeitamente análoga, podemos provar que num Universo de curvatura negativa, $k = -1$, o intervalo pode ser escrito como:

$$ds^2 = -c^2dt^2+a^2(t)\{dr'^2+R_0^2senh^2(r'/R_0)[d\theta^2+sen^2\theta d\phi^2]\}$$

Para isso basta fazer $r/R_0 = senh(r'/R_0)$ na métrica mostrada originalmente.

As coordenadas r ou r' que entram na parte espacial do intervalo de Robertson-Walker são ambas chamadas de coordenadas radiais comóveis.

3 Transição para livro da Barbara Ryden

O capítulo 3 do livro Introduction to Cosmology, de Barbara Ryden (BR), trata justamente da métrica e da noção de curvatura. Contudo, é importante advertir para algumas diferenças de notação com relação ao que fizemos na dedução inicial das eqs. de Friedmann ou com relação à notação do livro do Bernard Schutz (BS).

A principal diferença é que no livro BR trata a coordenada r inicialmente como sendo um arco sobre uma superfície 2D curva, tal como a superfície de uma esfera (eq. 3.9) ou de uma sela de cavalo (eq. 3.11). Quando é apresentada a métrica de Robertson-Walker, r se torna então a coordenada radial comóvel que definimos acima como r'. O que nós definimos como r acima é usado como x no Cap. 3 de BR.

O Cap. 12 do livro de Bernard Schutz (BS), que trata de cosmologia, também usa a coordenada r como usamos acima, usando uma outra notação, χ, para a coordenada radial comóvel r', na notação desse texto, e r na notação do livro da BR. Ver as expressões 12.13 de BS e 3.24 de BR. Note ainda pelas mesmas expressões que o fator de escala, que é a(t) em BR, é R(t) no BS. Confuso, não?

Essa pequena seção de alerta sobre notação é importante, pois seguiremos o livro de BR daqui por diante. Para simplificar, daqui por diante portanto, vamos usar a notação de BR.

4 Geodésia

Vimos o que é uma geodésia no estudo da Relatividade. Para a Cosmologia padrão, em que usamos a métrica de Robertson-Walker, já na mesma notação que o livro de BR

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\{dr^2 + R_0^2 S_k(r)[d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2]\}$$

basta fazer $d\theta = d\phi = 0$.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)dr^2$$

Chamamos de distância própria entre dois pontos o comprimento do segmento de geodésia instantâneo (ou seja, a um instante t fixo, $dt = 0$) entre esses pontos

$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr' = a(t)r$

onde, sem perda de generalidade, consideramos que um dos pontos está na origem do sistema de coordenadas. Chamamos r de distância comóvel.

5 Lei de Hubble

Se tomarmos a derivada de ambos os lados da relação entre distância própria e distância comóvel, temos

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}r + a\dot{r}$$

onde novamente aqui estamos nos adaptando à notação de derivação temporal usada pelo livro da BR.

Se o único movimento for causado pela expansão do Universo, as coordenadas comóveis serão fixas, de forma que $\dot{r} = 0$. Logo temos

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a} d_p(t) = H(t) d_p(t)$$

Essa é a Lei de Hubble, que estabelece que a taxa de variação da distância própria entre duas galáxias (dois pontos no espaço) é proporcional à distância própria. Sendo o fator de proporcionalidade, $H(t) = \dot{a}/a$, chamado de fator de Hubble ou de expansão. Avaliado no instante atual, t_0, temos a "constante" de Hubble

$$H_0 = H(t = t_0) = \dot{a}(t_0)$$

Valem alguns comentários sobre a chamada Lei de Hubble. Primeiramente, as coordenadas comóveis de uma galáxia em geral variam no tempo, pois elas sofrem uma aceleração gravitacional resultante devido à distribuição de matéria (incluindo outras galáxias) em seu entorno. Ou seja, o segundo termo da derivada temporal de $d_p(t)$ não é rigorosamente nulo. $\dot{r}$ é chamado de velocidade peculiar. Na verdade, esse é apenas o componente radial da velocidade peculiar, já que as coordenadas angulares, θ e ϕ também podem variar.

Outra observação importante é que o termo $\dot{d}_p = Hd_p$ tem dimensão de velocidade, mas na verdade não é uma velocidade no sentido de espaço percorrido por unidade de tempo. Isso porque essa variação da distância própria resulta da expansão do espaço e não do deslocamento no espaço. Inclusive, é possível haver pontos no espaço em que $\dot{d}_p(t) > c$. Ainda assim, é comum chamarmos $\dot{d}_p$ de velocidade de recessão ou de afastamento, ou ainda velocidade de Hubble.

Agora tratemos de valores. A constante de Hubble hoje é conhecida com precisão, sendo $H_0 = 70 - 75$ km/s/Mpc. Isso significa que uma galáxia atualmente situada a uma distância $d_p(t_0) = 100$ Mpc da nossa Galáxia, tem uma velocidade de Hubble $\dot{d}_p \simeq 7000$ km/s. Já a velocidade peculiar de um objeto material, por ser deslocamento no espaço por unidade de tempo, certamente não pode exceder a velocidade da luz. Um valor típico para a velocidade peculiar entre duas galáxias é de 10^2 ou 10^3 km/s. Ou seja, exceto pelas galáxias do Universo Local, com $d_p \leq 20$ Mpc, os movimentos peculiares são pequenos comparados à velocidade de recessão.

6 O desvio para o vermelho: *Redshift*

Definimos o desvio para o vermelho (ou para o azul) como sendo a variação dos comprimentos de onda da luz emitida por uma fonte luminosa, relativamente ao que medimos em repouso com relação à fonte. Ou seja, se luz é emitida com comprimento de onda λ_e no laboratório (em repouso) e a recebemos com comprimento λ_0, o *redshift* z é dado por

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1$$

Num Universo em expansão ou contração de acordo com um fator de escala, o *redshift* resulta do fato de que o comprimento de onda (que é a distância entre dois máximos ou mínimos da onda eletromagnética (EM)) varia no tempo de acordo com a(t). Ou seja:

$$\lambda(t) = \lambda_0 a(t)$$

Onde λ_0 é o comprimento da onda EM observado por nós no instante presente, em que o Universo tem idade t_0 e $a(t_0) = 1$, tal que , $\lambda_0 = \lambda(t_0)$.

Seja o caso de um Universo que está em expansão, de forma que $a(t)$ cresce com o tempo. No passado, $t < t_0$, tínhamos um fator de escala $a(t) < 1$, de forma que $\lambda(t < t_0) < \lambda_0$. No instante t_e em que uma fonte distante emite a radiação EM que está chegando a nós agora em t_0, essa mesma radiação EM tinha $\lambda_e = \lambda_0 a(t_e) < \lambda_0$. Dessa forma, temos que um *redshift* $z > 0$. Na verdade, teremos:

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 a(t_e)} - 1 = \frac{1}{a(t_e)} - 1$$

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)}$$

Ou seja, quanto maior o *redshift* de uma galáxia, mais jovem era o universo quando a luz que ora recebemos da galáxia foi por ela emitida. Como o tempo de viagem da luz da galáxia até nós, $t_0 - t_e$, também chamado de *lookback time* ou tempo de retrovisão, será tanto maior quanto maior a distância comóvel da galáxia emissora. Sendo assim, o *redshift* aumenta com a distância comóvel. No Cap. 7 do livro BR estudaremos em mais detalhe a chamada relação distância-redshift.

Podemos deduzir a mesma relação entre z e $a(t_e)$ usando o fato de que a luz percorre uma geodésia de intervalo nulo entre a galáxia emissora e nós. Logo, temos a relação

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0 \ \rightarrow \ r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Assumindo novamente que nossas coordenadas comóveis ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$, ou seja, colocamonos na origem do sistema) e as coordenadas comóveis da fonte emissora não variam no tempo, então sabemos que essa integral acima sempre terá o mesmo valor, independente dos limites de integração. A dedução da expressão para z é dada então na seção 3.4 do livro BR, a partir da eq. 3.39.

Podemos generalizar o raciocínio exposto naquela seção para deduzir uma expressão para a dilatação temporal entre eventos no referencial da galáxia emissora e eventos correspondentes no nosso referencial. Pense num evento ocorrido na galáxia emissora num instante t_e. A informação desse evento, viajando à velocidade da luz, irá chegar a nós num instante t_0, de forma que

$$r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Mas se um outro evento ocorre na galáxia emissora no instante $t_e + \delta t_e$ e chega até nós no instante $t_0 + \delta t_0$, temos também a igualdade

$$r = c \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Logo

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}$$

$$\delta t_0 = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}$$

7 Densidade crítica e parâmetros de densidade

Usando a relatividade geral, deduzimos a equação de FL com a forma abaixo.

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon(t)}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

onde ϵ acima representa a densidade de energia total, somando-se todos os constituintes do Universo. Sempre podemos reescrever o termo da constante cosmológica como:

$$\frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G\epsilon_\Lambda}{3c^2} \;\rightarrow\; H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\sum_i \epsilon_i(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

onde na última igualdade deixamos explícita a soma das densidades de energia de todos os componentes do Universo (matéria, radiação, Λ, ...).

Qual a densidade de energia total no caso de um Universo espacialmente plano? Basta fazer $k = 0$, o que resulta em

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}$$

sendo ϵ_c chamada de densidade de energia crítica. Podemos definiar agora o parâmetro de densidade do i-esimo constituinte do Universo como sendo

$$\Omega_i(t) = \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_c(t)}$$

Trata-se portanto de uma grandeza adimensional que informa qual a fração da energia total com que o i-esimo componente contribui em dado instante.

A soma dos parâmetros de densidade, $\sum_i \Omega_i = \sum_i \epsilon_i/\epsilon_c$ informa diretamente a curvatura do espaço. Para ver isso, basta dividir a equação de FL por H^2:

$$\frac{H^2(t)}{H^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2H^2}\sum_i \epsilon_i(t) - \frac{kc^2}{H^2R_0^2a^2}$$

$$1 = \frac{\sum_i \epsilon_i(t)}{\epsilon_c(t)} - \frac{kc^2}{H^2R_0^2a^2}$$

$$1-\sum_i \Omega_i = -\frac{kc^2}{H^2 R_0^2 a^2}$$

O sinal do lado direito é definido pelo sinal da constante de curvatura k. Fica claro então que se $\sum_i \Omega_i = 1 \ \rightarrow \ k=0$; se $\sum_i \Omega_i > 1 \ \rightarrow \ k=1$; se $\sum_i \Omega_i < 1 \ \rightarrow \ k=-1$

8 Distâncias cosmológicas

No capítulo 7 do livro é deduzida, a partir de um expansão em série da função a(t), a relação entre distância própria de uma fonte na época atual, $d_p(t_0)$, e o seu redshift z. Também são apresentados os conceitos de distância de luminosidade, d_L, e distância de diâmetro angular, d_A.

$$f = \frac{L_0}{4\pi d_L^2} \ \rightarrow \ d_L = \left(\frac{L_0}{4\pi f}\right)^{1/2}$$

onde f e L_0 são, respectivamente, o fluxo e a potência luminosa recebidos de uma fonte à distância d_L no instante presente $t=t_0$.

A luminosidade da fonte no seu referencial é $L_e = dE_e/dt_e$, enquanto que a luminosidade recebida no presente é $L_0 = dE_0/dt_0$. Sabemos que os fótons emitidos perdem energia devido ao redsfhit:

$dE_0 = dE_e/(1+z)$. Sabemos também que há a dilatação temporal: $dt_0 = (1+z)dt_e$. Logo:

$$L_0 = \frac{dE_0}{dt_0} = \frac{1}{(1+z)^2}\frac{dE_e}{dt_e} = \frac{L_e}{(1+z)^2}$$

$$f = \frac{L_e}{4\pi d_L^2(1+z)^2}$$

Mas o fluxo é a potência emitida por unidade de área. A área sobre a qual essa potência luminosa da fonte se distribui à distância do observador vem da métrica de RW:

$$A = a^2 S_k^2(r)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} sen\theta d\theta = 4\pi a^2 S_k^2(r)$$

No instante presente, $a(t_0) = 1$ e

$$f = \frac{L_e}{4\pi S_k^2(r)}$$

Igualando as duas expressões vemos que $d_L = S_k(r)(1+z)$.

Podemos usar a métrica novamente para nos perguntarmos qual o tamanho próprio dl de uma fonte a uma distância comóvel r e que vemos no céu com um tamanho angular $d\theta$. Para isso fazemos $dt = dr = d\phi = 0$

$$ds = dl = a(t)S_k(r)d\theta = \frac{S_k(r)d\theta}{1+z}$$

A distância de diâmetro angular vem da expressão:

$$d\theta = \frac{dl}{d_A} \;\rightarrow\; d_A = \frac{dl}{d\theta} = \frac{S_k(r)}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

Quando $z \rightarrow 0,\; d_A = d_L = r = d_p(t_0)$

9 Radiação cósmica de fundo (CMB)

Descoberta na década de 1960s, é um campo de radiação EM bastante isotrópico. Em qualquer direção, podemos ajustar uma temperatura de Planck de $T_0 = 2.725$K ao espectro dessa radiação. As variações de temperatura de uma direção para outra estão da 4a casa decimal em diante.

A densidade de energia associada à radiação CMB é dada pela expressão 2.26 do livro da BR:

$$\epsilon_{r,0} = \alpha T_0^4 = 7.56\,10^{-16} \times 2.725^4 = 4.2\,10^{-14} J m^{-3}$$

Já a densidade numérica de fótons da CMB é dada pela expressão 2.28:

$$n_{r,0} = \beta T_0^3 = 2.03\ 10^7 \times 2.725^3 = 4.1\ 10^8\ m^{-3}$$

A energia média de um fóton hoje é então: $E_r \simeq \epsilon_{r,0}/n_{r,0} = 1\ 10^{-22}\ J = 6.2\ 10^{-4}\ eV$. Essa energia tem frequência de onda associada $\nu = E_r/h = 150 GHz$ e comprimento de onda associado $\lambda \simeq 2\ mm$. Está na faixa chamada de micro-ondas, como o nome alternativo, radiação de fundo de micro-ondas, já sugere.

Comparemos com a densidade média de bárions:

$$n_{bary} = \frac{\epsilon_{b,0}}{m_p c^2} = \frac{\Omega_{b,0}\epsilon_{c,0}}{m_p c^2} = \frac{0.04 \times 5200 MeV m^{-3}}{938\ MeV} = 0.22\, m^{-3}$$

onde o valor do parâmetro de densidade apenas para o componente bariônico da matéria foi tirado do Cap. 8 e será mais bem explicado no Cap. 10, pois ele vem dos vínculos obtidos a partir da composição química primordial do Universo.

A razão atual entre o número de fótons CMB e o número de bárions é então:

$$\eta = \frac{n_{r,0}}{n_{bary}} \simeq \frac{4.1\ 10^8}{0.22} = 2\ 10^9$$

Ou seja, há da ordem de 1 bilhão de fótons para cada bárion. Como todos os fótons produzidos pelas estrelas, galáxias, etc, até hoje ainda são uma fração menor comparada ao número de fótons primordiais, e assumindo que o número de prótons e neutrons não mudou, essa razão η pode ser considerada como uma constante ao longo da evolução cósmica.

Note que no livro da BR, esse parâmetro η é o inverso do calculado aqui, ou seja, a razão entre bárions e fótons.

É importante lembrarmos que no passado remoto, quando o Universo era jovem, os fótons tinham energia mais alta, pois as ondas a eles associadas tinham comprimento menor (frequência maior). Então, no passado remoto os fótons CMD tinham energia para ionizar os átomos de H e He que se formaram no início da evolução do Universo (ver o Cap. 10, nucleossíntese primordial).

A fração de ionização é definida como

$$X = \frac{n_p}{n_p + n_H}$$

onde n_p é a densidade de prótons livres e n_H é a densidade de átomos de H neutros. Se considerarmos um gás só de H (sem outros elementos), então $n_p = n_e$, onde n_e é a densidade de elétrons livres.

No início então temos $X = 1$ e todos os elétrons estão livres, pois os fótons da CMB, pelo menos os mais energéticos (e olhe que há $\eta = 2\ 10^9$ fótons por átomo de H), têm energia maior que o potencial de ionização do H, 13.6 eV.

Como os elétrons estão livres no Universo jovem, eles então interagem fortemente com os fótons via espalhamento clássico, de Thompson. Obivamente os elétrons também interagem eletricamente com os prótons. Então a matéria bariônica está acoplada aos fótons e assim se manterá até que as reações de espalhamento se tornem menos frequentes.

Um parâmetro de comparação útil para avaliar o quão frequentes são as interações entre radiação CMB e matéria bariônica, é a *frequência de expansão do Universo* dada pelo fator de Hubble, H, lembrando que ele tem dimensão de inverso de tempo. Ou seja, desejamos comparar a taxa de interações de um fótons típico Γ com o fator de Hubble H. No início as interações são frequentes, de forma que $\Gamma >> H$. Chamamos de era de desacoplamento a época quando $\Gamma = H$. Isso equivale a dizer que na era do desacoplamento o intervalo de tempo entre duas interações sucessivas de um fóton com os elétrons, Γ^{-1}, se torna comparável à idade do Universo, H^{-1}. Ou ainda, que o livre caminho médio de um fóton, c/Γ, se iguala a uma estimativa do horizonte observável, c/H.

Na verdade, se a matéria conhecida se mantivesse ionizada, a era de desacoplamento seria relativamente recente, $z \sim 42$, conforme discutido na seção 9.2 do livro.

Na seção 9.3, usando a distribuição de energia clássica, de Boltzmann (expressão 9.21 do BR), podemos ver como estimar a razão entre átomos de H ionizados e neutros, em função da temperatura T, a qual sabemos ser função do tempo, ou ainda do fator de escala a, ou ainda do redshift z. Isso é feito na expressão 9.22 do BR. Fazendo algumas aproximações, chegamos na eq. de Saha, 9.23, e dali podemos associar $n_H/(n_p\, n_e)$ com η e X, sempre em função da temperatura. Essa relação nos permite determinar X em função de T. Mas a temperatura do gás de fótons varia com

$$T = \frac{T_0}{a} = T_0(1+z)$$

de forma que podemos determinar X em função de z. Chamamos de era da recombinação aquela em que a fração de ionização cai para $X = 1/2$. Usando a equação de Saha, essa época é estimada como ocorrendo em $z_{rec} \simeq 1370$, quando a temperatura dos meios acoplados, matéria bariônica e fótons, era de $T \simeq 3740K$. Lembremos que até o desacoplamento, as trocas de energia entre a matéria e os fótons CMB garante que esses dois meios estejam em equilíbrio térmico.

A discussão do livro mostra que o desacoplamento ocorre logo depois da recombinação, o que faz sentido. Ou seja, quando uma fração substancial dos elétrons já não estão mais livres, diminui a taxa de interações com os fótons, via espalhamento Thompson, o que leva ao desacoplamento. Isso significa que por essa época, em que há a era da recombinação seguida pelo desacoplamento, os fótons CMB podem viajar mais livremente pelo espaço. O Universo se torna transparente à propagação de sua radiação primorial.

Note que a época em que a fração de ionização atinge $X = 1/2$ depende do valor da razão entre o número de fótons e de bárions, η. E também será sensível à inclusão de átomos de He nos cálculos. A sensibilidade dos valores de z_{rec} e z_d com esses fatores é justamente exploradas nos problemas 9.1 e 9.3 do livro BR.

Estudos mais recentes contudo mostram que a maior parte do meio intergaláctico está ionizado. Mas quando estudamos esse meio a alto redshift

$(6 < z < 10)$, o vemos com proporção maior de H neutro, como prevê a teoria que acabamos de discutir. Então o Universo voltou a ser ionizado depois do desacoplamento, em algum momento com $z < 15$, tendo essa fase de reionização terminado a $z \simeq 6$

As seções 9.4 e 9.5 falam das flutuações (ou anisotropias) na temperatura da CMB. Conforme mencionado antes, elas têm amplitude muito baixa, $\delta T/T \simeq 10^{-4}$. E o valor típico da flutuação depende da escala angular no céu. Isso leva ao conceito de espectro de potência, que dá para cada escala angular, a amplitude típica de uma flutuação naquela escala. Conforme descrito no livro, o espectro de potência é construído decompondo as flutuações observadas em harmônicos esféricos e calculando a correlação angular entre as flutuações em temperatura usando essa expansão. A seção 9.5 discute a origem dessas flutuações, associada às não-homogeneidades primordiais no campo de densidade de matéria e energia do Universo. Essas não-homogeneidades são a origem das grandes estruturas que vemos no Universo a $z = 0$, como os superaglomerados e os vazios de galáxias. No interior dessas não-homogeneidades, a matéria escura, que não interage com os fótons, tende a se contrair devido à gravidade. Já a matéria bariônica está acoplada aos fótons, situação que dura até a era do desacoplamento, como vimos. Então a matéria bariônica oscila devido à competição entre a gravidade e a pressão dos fótons. A isso chamamos de oscilação acústica de bárions (BAO). Isso imprime, na era do desacoplamento, uma escala característica na distribuição da matéria e das galáxias, associada a este modo oscilatório, com tamanho comóvel de $\simeq$ 120 Mpc aproximadamente, a que chamamos de pico das BAO. Esse é nosso melhor exemplo de uma régua padrão. Estudar o espectro de potências da CMD, em especial o pico das BAO, vem permitindo as mais precisas estimativas dos parâmetros de densidade, de matéria e energia, bem como da constante de curvatura do espaço, k.

10 Nucleossíntese Primordial

Sabemos que a temperatura da radiação de fundo varia com o inverso do fator de escala, $T = T_0/a$, onde $T_0 = 2.725$K. Sabemos que antes da era do desacoplamento, $z \simeq 1100$, $a \simeq 9 \times 10^{-4}$, a matéria bariônica estava acoplada à CMB, mantendo-se à mesma temperatura. Podemos nos perguntar então qual a temperatura do gás de fótons e bárions ainda mais cedo. Por exemplo, na era de equilíbrio entre matéria e radiação, $a_{rm} = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0} \simeq 2.8 \times 10^{-4}$, temos $T_{rm} \simeq 10^4$K. Antes disso, como era a radiação que dominava a dinâmica do Universo, podemos inclusive adotar o modelo visto na seção 5.5 do livro BR, em que o fator de escala varia como

$$a(t) \propto t^{1/2} \ \rightarrow \ T(t) \propto t^{-1]2}$$

e nesse caso podemos determinar a temperatura do gás fótons-bárions em função do tempo. De acordo com o modelo de referência (ver tabela 6.2 do livro da BR), $t_{rm} = 4.7 \times 10^4$ anos. Logo, quando o Universo tem 1 ano de vida, temos $T(1\, ano) = 2.1 \times 10^6$ K. E quando o Universo tem 1s de vida, temos então

$$T(1\ s) \simeq 1.1 \times 10^{10}\ K$$

Isso é equivalente à expressão 10.1 do livro da BR. Podemos também definir a energia típica de uma partícula em função do tempo para o Universo jovem:

$$< E >= kT(t) \simeq 1 \ MeV \ t(s)^{-1/2}$$

Ou seja, a energia por partícula do fluido acoplado de radiação EM e bárions é comparável à energia de ligação por nucleon (próton ou neutron) de núcleos atômicos, conforme mostra a Figura 10.1 do mesmo livro. Isso significa que o Universo jovem é suficientemente quente, e certamente também é suficientemente denso, para que ocorram reações nucleares. É durante os primeiros minutos de vida do Universo justamente que se formam os primeiro núcleos atômicos, de H, He, Li e Be, mas principalmente de H e He. Essa é a fase da *nucleossíntese primordial*.

Como a energia de repouso dos bárions, p e n, é de $m_p = 938.3$ MeV e $M_n = 939.6$ MeV, a energia típica de um fóton ou bárion em $t = 1s$ já não é suficiente para quebrar essas partículas. Mas elas podem ser convertidas uma na outra pelas reações 10.9 e 10.10 do livro, sem falar que os neutrons sofrem decaimento β, reação 10.7. Então podemos novamente estimar o número de prótons e neutrons usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann dada em 10.13, onde a diferença de energia entre n e p irá favorecer a existência dos prótons, que são o estado de menor energia. Quando $kT >> Q_n = 1.29$ MeV, sendo Q_n a diferença de energia de repouso entre n e p, então a razão $n_n/n_p = 1$. Mas à medida em que o gás fótons-bárions se resfria com a expansão do Universo, essa razão vai diminuir. Quando as reações 10.9 e 10.10 deixam de ser eficientes, $t \simeq 1$s. Neste instante, a razão $n_n/n_p \simeq 0.2$. Isso por si só já explica porque o elemento mais comum no Universo, de longe, é o H.

As reações 10.9 e 10.10 se tornam ineficientes tão cedo pelo fato de que a seção de choque associada a elas é muito baixa e rapidamente decrescente com a temperatura. Então podemos dizer que quando a taxa dessas reações se torna muito menor do que o fator de Hubble, há um "congelamento" no número de neutrons e prótons. Como dissemos, isso ocorre em torno de $t = 1$s. Usamos aspas porque na verdade o decaimento β continua operando e convertendo neutrons livres em prótons, elétrons e anti-neutrinos eletrônicos. Ou seja, a razão n_n/n_p continua a decair em função da instabilidade dos neutrons.

Reações nucleares que não envolvem a interação nuclear fraca (intermediada por neutrinos e antineutrinos) têm seção de choque maior, ainda que também dependentes da temperatura. Então, por exemplo, as reações de produção e destruição do isótopo de H com massa atômica $A = 2$, o deutério (D), continuam ocorrendo por alguns minutos. Podemos dizer que esse processo é uma corrida de salvação dos neutrons. Uma vez acoplados a núcleos leves, como de D ou He, os neutrons tendem a não mais decair. Esse processo de produção de deutério é quantificado pela expressão 10.26, onde novamente usamos a distribuição de Maxwell-Boltzmann aplicada ao número de núcleos de D relativo ao de prótons (que são núcleos de ^1H). Por ser configuração de menor energia com relação a p e n livre, os núcleos de D tendem a ser favorecidos pelas reações à medida que o Universo se expande e resfria.

A partir da expressão 10.26 é então possível determinar a escala de tempo necessária para que a razão n_D/n_n, que começa próxima a zero, atinja o valor $n_D/n_n = 1$. E a partir do valor de t_{nuc} podemos aplicar uma correção para a razão n_p/n_n devido ao decaimento β, o que é feito em 10.32.

A partir da produção do D, outros núcleos leves, em especial ^4He são produzidos, envolvendo vários reações nucleares, conforme descrito na seção 10.4. O resultado final e resumido pela Fig. 10.4, que mostra a evolução esperada da densidade numérica de diferentes elementos/partículas com o tempo (ou temperatura). Fica claro pela figura que o processo de síntese de D dura poucos minutos. E que os núcleos de D em sua maioria rapidamente são fundidos em núcleos de He, havendo também produção de menores quantidades de trítio (^3H) e Li.

As abundâncias mostrada no final do processo de nucleossíntese primordial (lado direito da Fig. 10.4) podem ser comparadas com as medidas feitas em sítios astrofísicos no Universo atual. Mas para que a comparação seja útil, esses sítios astrofísicos têm que ter sofrido pouco ou nenhum processo posterior de alteração de sua composição química. Ou seja, precisamos de ambientes que reflitam a composição primordial do Universo. Isso não é nada fácil, pois a formação de galáxias, e dentro delas de estrelas, explosões de SN, buracos negros supermassivos, entre outros processos, alteram a química original do gás de matéria bariônica.

A Fig. 10.5 mostra que as previsões da nucleossíntese primordial dependem da razão $\eta =$

n_b/n_γ. Quanto mais bárions por fótons, mais cedo começa o processo de nucleossíntese, de forma que mais eficiente ela é. Isso significa que os produtos finais, em especial o He, são aumentados com η maior, em detrimentos dos produtos intermeidários, como D. É basicamente o que a figura mostra. Na verdade, os vínculos observacionais sobre as abundâncias primordiais desses elementos acabam impondo os melhores vínculos à razão η e à quantidade de bárions no Universo, Ω_b.