Porto Alegre 12 de setembro de 2004

5ta Aula de Relatividade e Cosmologia

Horacio Dottori

1.11- A contração espacial

Veremos então este efeito relativistico de 3 pontos de vista diferentes:

a- como visto no espaço físico

b- como visto no diagrama e-t.

c- como obtido das transformações de Lorentz

Se nos perguntarmos como medir o comprimento de uma vareta que se desloca na direção do eixo x do sistema do laboratório a grande velocidade, a forma menos dolorosa será medir simultaneamente os dois extremos da vareta. Primeiramente vamos a analisar o fenômeno, como visto no espaço a supor 3 momento de um trem (Figura 1), que se desloca da esquerda à direita. No meio do trem esta em pé um sujeito (verde) e num dado ponto que consideraremos como x = 0 outro (laranja), porem no referencial em repouso (a estação).

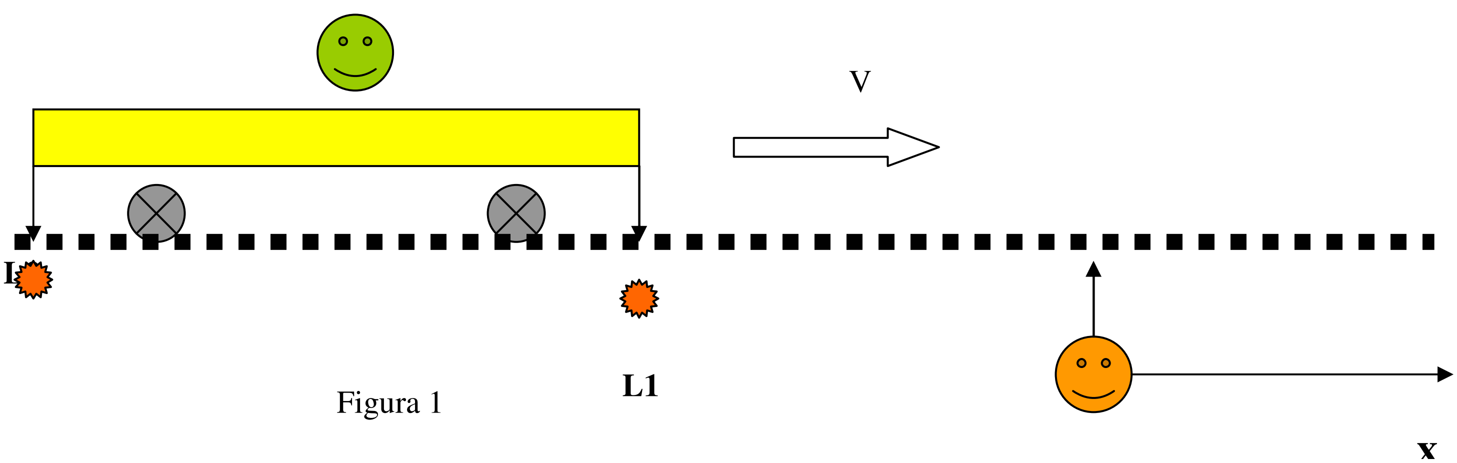

Figura 1

As duas setas nos extremos do trem representam contatos e o tracejado dos trilhos lampadazinhas (pertencem ao sistema em repouso, a estação) , tão juntas como necessário, que emitem luz de um dado comprimento de onda a cada contato das setas no extremo do trem. Na figura 5-1 , o trem em x < 0 lança dois frentes de luz das lampadas L1 e L2 . No que a frente de onda propaga-se em forma esférica, em todas as direções, o trem desloca-se na direção x>0.

O que vera o observador em repouso? Ele verá a frente de onda de L1 chegar antes que a de L2, pois esta está mais próxima da sua posição. Quanto será essa diferença? O comprimento do trem no *referencial da estação* dividido por c (logo veremos qual é essa medida).
O que vai ver o observador em movimento? (Figura 2). Ele vai ver dois efeitos: O primeiro é o arribo da luz de L1 antes que a de L2, já que no tempo que a luz viaja ao seu encontro ele desloca-se na direção de L1 com velocidade v.
A outra coisa que ele vai ver é a luz de L1 com comprimento de ondas mais curto que a de L2 (efeito Doppler). Al longo de todo o trajeto do trem o observador em movimento verá a mesma diferença de tempo entre os flashes das lampadas dianteiras e traseiras e o mesmo efeito Doppler.
Ambos observadores medem a mesma velocidade para a luz, segundo o postulado fundamental da teoria da relatividade. SE ISTO NÃO FOSSE ASSIM A TEORIA NÃO VALERIA DE NADA!.

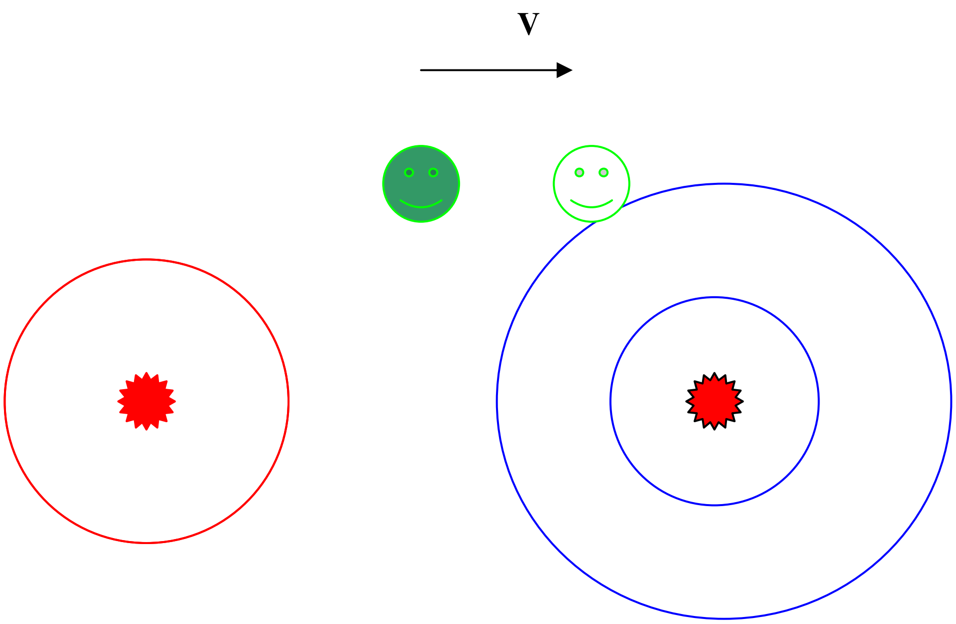

Fig. 5- 2

Na figura 5-2 a frente de onda que saiu da L1 atingiu ao observador, em quanto aquela que saiu de 2 ainda não. Simbolizamos com a cor azul o efeito Doppler que sofre uma fonte que se aproxima do observador montado no trem. Os desenhos devem ser interpretados somente em forma qualitativa!.

O observador do laboratório vê os flashes de luz sempre com a cor original, na situação da figura1 L2 arriba antes que L1.

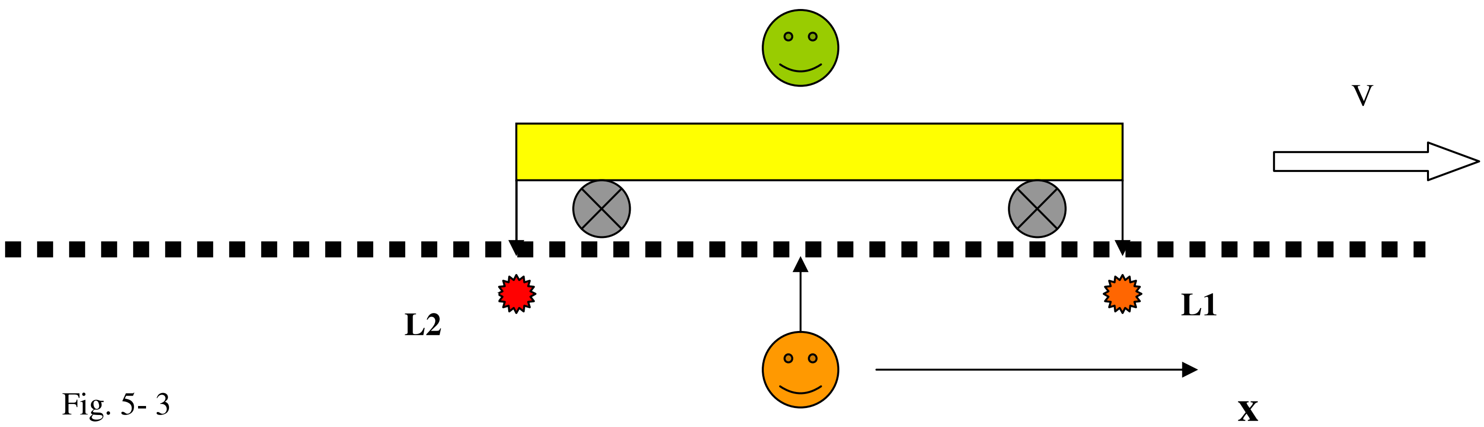

Fig. 5- 3

Na situação da figura 5-3 o observador montado no trem continua a ver sempre o mesmo efeito, a luz da lâmpada acessa pelo contato posterior é mais vermelha em tanto que aquela acessa pelo contato da frente é mais azul e vê-la chegar antes.
No particular caso da posição da figura 3, o observador do chão vê ambas ***flashes chegar ao mesmo tempo***. Após o trem passar por ele, o observador no chão verá a luz da traseira chegar antes e a da dianteira chegar depois.

Agora, devemos ter em conta que as lampadazinhas formam parte do sistema de referência considerado em repouso, ou seja elas tem OS SEUS RELÓGIOS SINCRONIZADOS COM O OBSERVADOR laranja. Os contatos montados nos extremos do trem TEM OS RELÓGIOS SINCRONIZADOS COM O OBSERVADOR VERDE. O que marcam mesmo os relógios de cada sistema? E qual é o comprimento do trem visto pelo observador em repouso?

Existem duas maneiras de atacar o problema, pelas transformadas de Lorentz e graficamente no diagrama de Minkowsky. No diagrama aparece em forma mais FLAGRANTE a relatividade do conceito de simultaneidade, embora a solução analítica seja mais rápida.

1.11.2-Demonstração geométrica no diagrama de Minkowsky

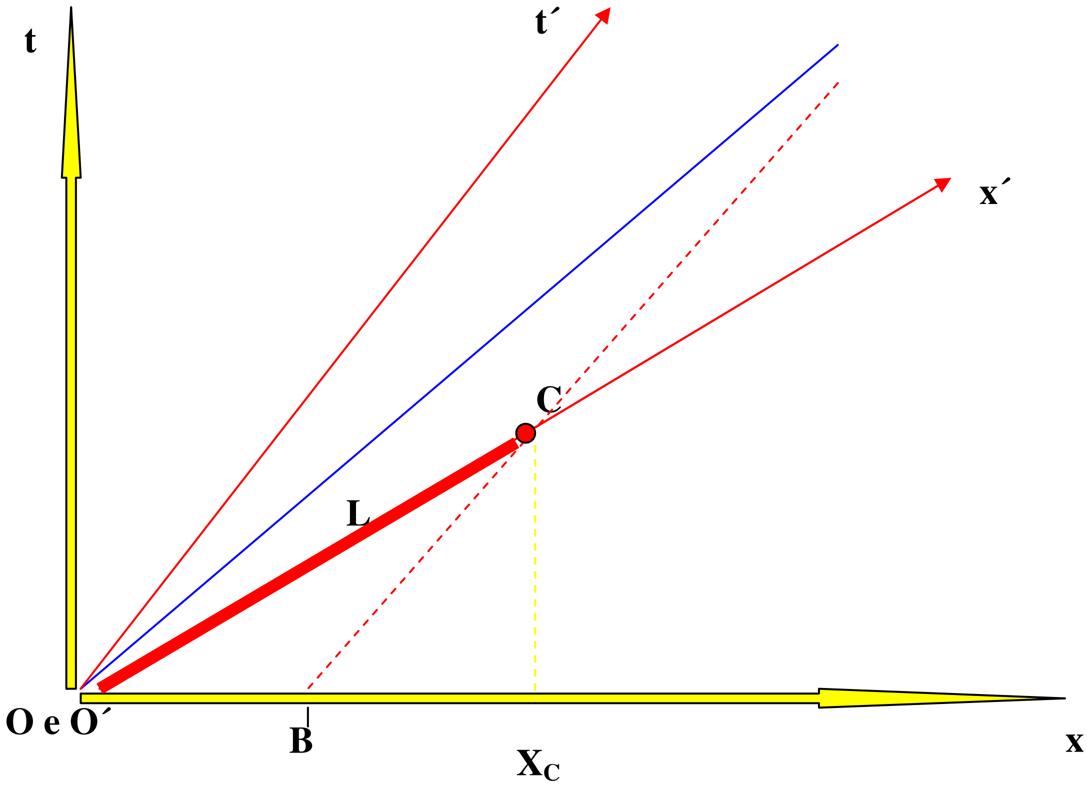

Figura 5-4

Na figura 5-4 reconhecemos os seguintes eventos:
O e O´são o inicio da experiência. *Em relação às figuras 5-1, 5-2 e 5-3 realizamos uma mudança, qual foi colocar o observador O´ no extremo posterior do trem e sincronizar o zero dos relógios dos dois sistemas no ponto em que ambos observadores se cruzam* . O trem de comprimento L encontra-se ao longo do eixo x´. O início do trem no sistema (x´, t´) é o ponto C e o fim o ponto O´ (*isto é totalmente convencional*, poderíamos ter colocado O´no meio do trem ou no início). O trem, como visto no e-t do sistema do laboratório desloca-se paralelo ao eixo x´. O trem no seu e-t próprio desloca-se como vê-se na figura 5-5.

O experimento de medição simultânea dos extremos da barra realizado pelo observador O, é a linha a t = 0, entre o evento O (escolhido para coincidir com O´) e o evento B. Ou seja que no referencial do laboratório o evento simultâneo com O (= O´) é o evento B. Em tanto que no sistema do trem o evento simultâneo com O (=O´) é o evento C.
Por tanto no sistema do laboratório mede-se como comprimento do trem $\mathbf{\Delta S_{OB} = l}$**,** em tanto que O´ mede **L**

A coordenada espacial do ponto C no sistema O e

$$\mathbf{x_C = L / (1-v^2)^{1/2}} \qquad (5.1) \quad .$$

Isto porque o eixo x´ é a linha **t = vx** (lembre que x´ é simetrica de t´em relação ao raio de luz!) . Em tanto que a coordenada temporal de C é $\mathbf{t_C}$**,** a coordenada temporal que **corresponde a** $\mathbf{x_C}$, dada por:

$$\mathbf{t_C = v.L / (1 - v^2)^{1/2}} \qquad (5.2).$$

A linha BC tem a inclinação $\mathbf{\Delta x / \Delta t = v}$, ou seja $\mathbf{(x_C - x_B) / (t_C - t_B) = v}$, e nós queremos saber x_B quando $t_B = 0$, o que fornece

$$\mathbf{x_B = x_C - v.t_C} \qquad (5.3), \text{ substituindo teremos:}$$

$$\mathbf{x_B = L / (1 - v^2)^{1/2} - v^2.L / (1 - v^2)^{1/2}} \text{ ou,}$$

$$\mathbf{x_B = L\ (1 - v^2)^{1/2}} \qquad (5.4)\text{, o que monstra a } \textit{contração temporal}.$$

1.11.3- Demonstração analítica pelas transformações de Lorentz

$$\mathbf{\Delta t = v.\gamma\ \Delta x' + \gamma.\ \Delta t'} \qquad \mathbf{(5.5)}$$

$$\mathbf{\Delta x = \gamma.\Delta x' + v.\ \gamma.\ \Delta t'} \qquad \mathbf{(5.5b)}$$

Queremos realizar uma medida simultânea dos dois extremos da barra no sistema de laboratório, isto equivale a por $\mathbf{\Delta t = 0}$., então $\mathbf{\Delta t' = v.\Delta x'}$, substituindo na (5.5b) teremos :

$$\mathbf{\Delta x = \gamma.\Delta x' + v.\ \gamma.\ (-v.\Delta x')} \ \textbf{ ou seja,}$$

$$\mathbf{\Delta x = \Delta x'.\ (1 - v^2)_{1/2}} \qquad \mathbf{(5.6)}$$

Como complemento dos diagramas de Minkowsky é um bom exercício ver a posição do trem em 3 instantes sucessivos no sistema (x,t) e no sistema próprio, e depois ver o mesmo com as lampadazinhas dos trilhos.